

**OLIMPIADE SAINS NASIONAL
 BIDANG MATEMATIKA
 SELEKSI TINGKAT KOTA / KABUPATEN
 TAHUN 2007**

Bagian pertama

1. $\sqrt{3} = 1,7\dots$

$\sqrt{5} = 2,2\dots$

Jadi $\left[\sqrt{3} - \sqrt{5} \right]^2 = (-1)^2 = 1$

2. Misal : $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} = a$ dan $\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = b$

Jadi bilangan itu $a - b = x$

$a^3 - b^3 = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) = 4$

$ab = \sqrt[3]{1} = 1$

$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

$x^3 = 4 - 3x$

$x^3 + 3x - 4 = 0$

Dengan aturan horner akan didapat $x=1$ (bulat positif)

3. $40\% = \frac{2}{5}$

Hari ini lebih banyak 40% dari kemarin, jadi yang dikerjakan hari ini: $1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ kali yang dikerjakan kemarin. Karena jumlah soal yang dikerjakan selalu berupa bilangan asli ,maka jumlah soal yang dikerjakan hari ini paling sedikit ada $\frac{7}{5} \times 5 = 7$ (dikali 5 karena 5 adalah bilangan asli terkecil yang habis dibagi 5)

4. $2007 = 3 \times 3 \times 223 \times 1$

Faktor-faktor positif dari 2007 adalah: 1, 3, 9, 223, 446 dan 2007 (ada 6 buah)

Jadi banyak himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah:

${}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5 + {}_6C_6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

5. Misal : $N = 10x + y$ dan $M = 10y + x$ dengan x, y bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan 1, dan lebih kecil atau sama dengan 9

$N - M = 10x + y - 10y - x = 9x - 9y = 9(x-y)$

Jadi $N - M$ selalu habis dibagi 9, 1 dan 3.

Di antara 9, 1 dan 3 hanya 3 yang prima

6. Misal : Hasil 5 pengamatan itu adalah a, b, c, d dan e.

$$\frac{(a + b + c + d + e)}{5} = 10, \text{ jadi } a + b + c + d + e = 50$$

Misal: $a \geq b \geq c \geq d \geq e$, maka $c = 12$

jadi $a + b + d + e = 38$

yang ditanya adalah nilai $a - e$ terkecil

$a \geq b \geq 12$ dan $e \leq d \leq 12$

supaya $a - e$ terkecil maka b harus sekecil-kecilnya jadi $b = 12$

jadi $a + d + e = 26$

Supaya $a - e$ sekecil-kecilnya maka a harus sekecil-kecilnya jadi $a = 12$

jadi $d + e = 14$

Supaya $a = e$ sekecil-kecilnya maka e harus sebesar-besarnya: karena $e \leq d$, maka diambil $d = e = 7$

jadi $a - e$ terkecil adalah $12 - 7 = 5$

7. Peluang menemukan 2 orang yang lahir dalam bulan yang sama: $\frac{{}_3C_2 \times 12 \times 11}{12^3} = \frac{11}{48}$

Peluang menemukan 3 orang lahir dalam bulan yang sama: $\frac{12}{12^3} = \frac{1}{144}$

Jadi peluang menemukan sedikitnya 2 orang yang lahir dalam bulan yang sama: $\frac{11}{48} +$

$$\frac{1}{144} = \frac{17}{72}$$

8. $a + b + c = 8$

tripel (a,b,c) yang memenuhi adalah:

1, 2, 5(TM, karena jumlah 2 sisi segitiga selalu > daripada sisi lainnya)

1, 3, 4(TM juga)

2, 3, 3(memenuhi)

2, 2, 4(TM juga)

Jadi luas segitiga itu $2\sqrt{2}$ (rumus heron)

9. L persegi = S x S

$$S = \frac{K}{4}, \text{ jadi } L = \frac{K^2}{16}$$

Perbandingan L kedua persegi :

$$\frac{9}{16} : \frac{4}{16} = 9 : 4$$

10. $\tan^2 x + \cos^2 x = \sec^2 x - \sin^2 x = (\sec x + \sin x)(\sec x - \sin x)$

$$\frac{(\sec x + \sin x)(\sec x - \sin x)}{\sin x + \sec x} = \sec x - \sin x$$

Bagian Kedua

$$11. f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x}) - 1 = 3$$

$$\text{jadi } 2(\sqrt{x}) = 4$$

$$\text{jadi } x = 4$$

12. Misal jumlah kotak untuk 10 apel yang dibutuhkan adalah x dan jumlah kotak 6 apel yang dibutuhkan adalah y .

$$10x + 6y = 44, \text{ yang ditanya adalah } x + y$$

Jika $x = 1$, maka 34 tidak habis dibagi 6, maka $x = 1$ (TM)

Jika $x = 2$, maka 24 habis dibagi 6, maka $x = 2$ dan $y = 4$ (Memenuhi)

Jika $x = 3$, maka 14 tidak habis dibagi 6, maka $x = 3$ (TM)

Jika $x = 4$, maka 4 tidak habis dibagi 6, maka $x = 4$ (TM)

Untuk $x > 4$ (TM), sebab y akan bernilai negative

Jadi $x = 2$ dan $y = 4$, jadi $x + y = 6$

$$13. x + y - xy = -1$$

$$x(1 - y) - (1 - y) = -2$$

$$(x - 1)(y - 1) = 2$$

karena $x \leq y$, maka $x - 1 \leq y - 1$, jadi penyelesaiannya:

$$x - 1 = 1 \rightarrow x = 2$$

$$y - 1 = 2 \rightarrow y = 3$$

$$(x, y) = (2, 3)$$

$$x - 1 = -2 \rightarrow x = -1$$

$$y - 1 = -1 \rightarrow y = 0$$

$$(x, y) = (-1, 0)$$

$$14. 33! = 33 \times 32 \times 31 \dots \times 2 \times 1$$

bilangan antara 1 - 33 yang habis dibagi 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33

3: habis dibagi 3^1

6: habis dibagi 3^1

9: habis dibagi 3^2

12: Habis dibagi 3^1

15: habis dibagi 3^1

18: habis dibagi 3^2

21: habis dibagi 3^1

24: habis dibagi 3^1

27: habis dibagi 3^3

30: habis dibagi 3^1

33: habis dibagi 3^1

Jadi nilai n terbesar adalah : $1 \times 8 + 2 \times 2 + 3 = 15$

15. Persamaan garisnya:

$$\frac{x - 3}{99 - 3} = \frac{y - 2\frac{1}{5}}{68\frac{3}{5} - 2\frac{1}{5}}$$

$$\frac{x - 3}{96} = \frac{y - 2\frac{1}{5}}{66\frac{2}{5}}$$

$$\frac{x - 3}{96} = \frac{5y - 11}{332}$$

$$83(x - 3) = 24(5y - 11)$$

$$83x - 249 = 120y - 264$$

$$83x + 15 = 120y$$

$$3 \leq x \leq 99 \text{ dan } 2\frac{1}{5} \leq y \leq 68\frac{3}{5}$$

dengan x dan y bilangan bulat

karena $83x + 15$ habis dibagi 120, maka angka terakhir dari $83x + 15$ harus 0, jadi angka terakhir $83x$ harus 5, supaya demikian x harus kelipatan 5, tapi bukan kelipatan 10

untuk $x = 5$: 430 (TM)(tidak habis dibagi 120)

untuk $x = 15$: 1260 (TM)

untuk $x = 25$: 2090 (TM)

untuk $x = 35$: 2930 (TM)

untuk $x = 45$: 3750 (TM)

untuk $x = 55$: 4580 (TM)

untuk $x = 65$: 5410 (TM)

untuk $x = 75$: 6240 Memenuhi

$$y = \frac{6420}{120} = 52$$

$$(x, y) = (75, 52)$$

untuk $x = 85$: 7070 (TM)

untuk $x = 95$: 7900 (TM)

Jadi banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah 1 yaitu (75,52)

16. Sudut SPQ = $60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$

Sudut TQP = $60^\circ - 35^\circ = 25^\circ$

Sudut PSQ = $180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ$

Sudut QTP = $180^\circ - 60^\circ - 25^\circ = 95^\circ$

Sudut QTR = $180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$

Sudut PSR = $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Sudut SXT = $360^\circ - 60^\circ - 85^\circ - 80^\circ = 135^\circ$

17. Misal : $AF = x$, maka $AC = 2x$
 Misal : $EC = y$, maka $BC = 2y$
 maka $AB = \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ (pakai phythagoras)
 maka $AE = \sqrt{4x^2 + y^2}$ (pakai phythagoras)
 dan $BF = \sqrt{4y^2 + x^2}$

$$\text{Jadi } \frac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} = \frac{4x^2 + y^2 + 4y^2 + x^2}{4x^2 + 4y^2} = \frac{5(x^2 + y^2)}{4(x^2 + y^2)} = \frac{5}{4}$$

18. $L = a \times t = 1 \times 2007 = 2007$

19. Supaya luasnya maksimal, maka segitiga tersebut harus berupa segitiga sama sisi.

$$\text{Jari-jari lingkaran luar} = \frac{ABC}{4L\Delta}$$

$$1 = \frac{ABC}{4L\Delta}$$

$$\text{Jadi } ABC = 4L\Delta$$

karena segitiga sama sisi, maka

$$a^3 = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \times 4$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$L = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

20. Gunakan barisan tingkat tinggi 2, 4, 7, 11, ... , dst

$$a = 2, b = 2, c = 1$$

$$U_n = a + (n-1)b + \frac{1}{2} (n-1)(n-2)c = 2 + (n-1)2 + \frac{1}{2} (n-1)(n-2)$$

cari n yang paling dekat dan ≥ 2007

$$\text{jika } n = 62, \text{ maka } U_{62} = 1954 \text{ (TM)}$$

$$\text{jika } n = 63, \text{ maka } U_{63} = 2017 \text{ (Memenuhi)}$$

Jadi jawabannya 63