

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Penjumlahan semua angkanya maksimal = 36. Tetapi 36, 35, 34, 33 dan 32 bukan bilangan prima. Maka penjumlahan maksimal semua angkanya = 31.
Dua angka pertama harus sebesar mungkin, yaitu 99. Jika angka ke-3 juga 9 maka angka ke-4 harus 4 sehingga 9994 bukanlah bilangan ganjil. Maka angka ketiga haruslah 8 dengan angka keempat adalah 5 yang merupakan bilangan ganjil.
∴ Bilangan ganjil 4-angka yang memenuhi adalah **9985**.

2. Misalkan nilai uang pecahan 100-an = x
Maka nilai uang pecahan 500-an = 3x dan nilai uang pecahan 200-an = 6x
Karena $(x) + (3x) + (6x) = 100.000$ maka $x = 10.000$
Banyaknya koin 100-an = $10000 : 100 = 100$
Banyaknya koin 200-an = $(6 \cdot 10000) : 200 = 300$
Banyaknya koin 500-an = $(3 \cdot 10000) : 500 = 60$
∴ Banyaknya koin = $100 + 300 + 60 = \mathbf{460}$.

3. Misalkan panjang sisi miring segitiga tersebut = r, sisi terpendek = x dan sisi lainnya = y

Diketahui bahwa $r = 2x$ dan $y = x + 1$

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow x^2 + (x + 1)^2 = (2x)^2$$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Ambil nilai x yang positif maka $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

Luas segitiga = $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y$

$$\therefore \text{Luas segitiga} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}$$

4. $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$; $2007 = 3^2 \cdot 223$; $2008 = 2^3 \cdot 251$

Banyaknya faktor prima dari 2006 = 3

Banyaknya faktor prima dari 2007 = 2

Banyaknya faktor prima dari 2008 = 2

∴ Maka bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah **2006**.

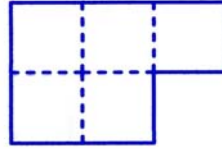
5. Misalkan ia menjual mobil masing-masing seharga y. Misalkan juga modal mobil pertama adalah x. Maka agar impas modal mobil kedua haruslah $2y - x$.

$$\frac{x - y}{x} = \frac{1}{10} \rightarrow 10y = 9x$$

$$\text{Keuntungan mobil kedua} = \frac{y - (2y - x)}{2y - x} = \frac{x - y}{2y - x} = \frac{10x - 9x}{18x - 10x} = \frac{1}{8}$$

∴ Persentase keuntungan pedagang untuk mobil kedua = **12,5 %**

6. Karena tidak ada yang tumpang tindih maka luas persegi = $245 : 5 = 49 \text{ cm}^2$.
 Panjang sisi persegi = 7.
 Agar kelilingnya kecil maka harus semakin banyak sisi-sisi persegi yang menempel dengan sisi-sisi yang lain.



\therefore Keliling persegi = $10 \times$ panjang sisi persegi = **70 cm**

7. Apabila pertandingan dua tim berakhir seri maka total nilai yang didapat kedua tim adalah 2 sedangkan apabila pertandingan dua buah tim berakhir dengan kemenangan salah satu tim maka total nilai kedua tim sama dengan 3.
 Total pertandingan = ${}_4C_2 = 6$.
 Nilai 4 hanya didapat jika tim tersebut menang satu kali, seri satu kali dan kalah satu kali.
 Agar jumlah nilai ketiga tim lainnya paling sedikit maka haruslah tiga pertandingan lainnya berakhir seri.
 Maka dari 6 pertandingan terdapat 4 pertandingan yang berakhir seri.
 Nilai total keempat tim = $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$
 Maka total nilai ketiga tim lainnya = $14 - 4 = 10$.
 \therefore Maka total nilai ketiga tim lainnya paling sedikit = $14 - 4 = 10$.

8. $1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n = 1!(2-1) + 2!(3-1) + 3!(4-1) + \dots + n!(n+1-1)$
 $1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n = (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + \dots + (n+1)!-n!$
 $1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n = (n+1)! - 1!$
 $\therefore 1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n = (n+1)! - 1$

9. Misalkan koordinat $Q(x_Q, y_Q)$ dan $P(x_P, y_P)$

Alternatif 1 :

Karena P di kuadran I maka Q pun akan di kuadran I. Karena $y_Q = 2x_Q$ maka $y_Q \geq x_Q$

Jarak Q ke garis $y = x$ adalah $PQ = 2$.

Jarak $Q(x_Q, y_Q)$ ke garis $Ax + By + C = 0$ dirumuskan dengan :

$$d = \frac{|Ax_Q + By_Q + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Maka :

$$d = \frac{|y_Q - x_Q|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2 \rightarrow y_Q - x_Q = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots (1)$$

Karena garis $y = 2x$ melalui Q maka $y_Q = 2x_Q \dots\dots (2)$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

Alternatif 2 :

Gradien garis $y = x$ adalah $m = 1$. Maka gradien garis yang melalui PQ adalah $m_{PQ} = -1$

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -1 \rightarrow 2x_Q - x_P = x_P - x_Q \rightarrow 3x_Q = 2x_P \dots\dots\dots (3)$$

$$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = 2 \rightarrow (x_Q^2 - 2x_Qx_P + x_P^2) + (4x_Q^2 - 4x_Qx_P + x_P^2) = 4$$

$$5x_Q^2 - 6x_Qx_P + 2x_P^2 = 4 \dots\dots\dots (4)$$

Substitusikan persamaan $3x_Q = 2x_P$ ke persamaan (4)

$$10x_Q^2 - 18x_Q^2 + 9x_Q^2 = 8$$

Karena Q di kuadran I maka $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

\therefore Koordinat Q adalah $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

10. $6n + 30 = k(2n + 1)$ untuk suatu k dan n bilangan asli

$$(k - 3)(2n + 1) = 27 = 3^3$$

Nilai $2n + 1$ yang memenuhi hanya jika $2n + 1 = 3, 9$ atau 27

Jika $2n + 1 = 3$ maka $k - 3 = 9 \rightarrow n = 1$ dan $k = 12$

Jika $2n + 1 = 9$ maka $k - 3 = 3 \rightarrow n = 4$ dan $k = 6$

Jika $2n + 1 = 27$ maka $k - 3 = 1 \rightarrow n = 13$ dan $k = 4$

\therefore Nilai n asli yang memenuhi $6n + 30$ adalah kelipatan $2n + 1$ adalah $n = 1, 4, 13$.

$$11. \left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 = {}_9C_0(2x^2)^9\left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \dots + {}_9C_k(2x^2)^k\left(-\frac{1}{x}\right)^{9-k} + \dots$$

Untuk mencari suku konstanta maka harus dipenuhi $x^{2k} \cdot x^{k-9} = x^0 \rightarrow k = 3$

$${}_9C_3(2x^2)^3(x)^{3-9} = 672$$

\therefore Maka konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah **672**.

12. Misalkan persamaan garis ℓ adalah $y = mx + c$

Karena titik potongnya dengan sumbu y bilangan prima maka c adalah bilangan prima.

Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0 \rightarrow mx + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{m}$ adalah bilangan prima.

Karena c prima maka $-\frac{c}{m}$ akan prima hanya jika $m = -1 \rightarrow y = -x + c$

Karena garis melalui titik $(3, 4)$ maka $4 = -3 + c \rightarrow c = 7 \rightarrow y = -x + 7$

\therefore Persamaan garis ℓ adalah $y = -x + 7$.

13. Karena dalam setiap dua kantong berselisih paling banyak 1, maka banyaknya permen hanya akan ada 2 jenis, yaitu m dan $m + 1$.

Karena $17 \equiv 1 \pmod{2}$ maka untuk dua kantong akan terdapat dua kemungkinan yaitu satu kantong berisi 8 permen sedangkan kantong lainnya 9 permen dan sebaliknya.

Karena $17 \equiv 2 \pmod{3}$ maka untuk tiga kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari dua kantong berisi 6 permen dan satu kantong lagi berisi 5 permen. Banyaknya cara mengemas

permen pada kasus ini adalah $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ cara.

Karena $17 \equiv 1 \pmod{4}$ maka untuk empat kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari satu kantong berisi 5 permen dan tiga kantong lagi berisi 4 permen. Banyaknya cara mengemas

permen pada kasus ini adalah $\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ cara. Demikian seterusnya.

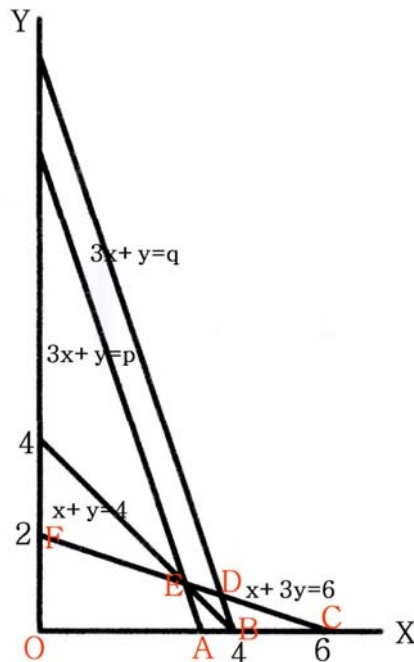
Misalkan Banyaknya cara = N maka :

$$N = \frac{2!}{1! \cdot 1!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{4!}{1! \cdot 3!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{6!}{5! \cdot 1!} + \frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{1! \cdot 7!} + \frac{9!}{8! \cdot 1!} + \frac{10!}{7! \cdot 3!} + \frac{11!}{6! \cdot 5!} + \frac{12!}{5! \cdot 7!} + \frac{13!}{4! \cdot 9!} + \frac{14!}{3! \cdot 11!} + \frac{15!}{2! \cdot 13!} + \frac{16!}{1! \cdot 15!} + \frac{17!}{0! \cdot 17!}$$

$$\text{Banyaknya cara} = 2 + 3 + 4 + 10 + 6 + 35 + 8 + 9 + 120 + 462 + 792 + 715 + 364 + 105 + 16 + 1$$

\therefore Banyaknya cara mengemas permen = **2652**

14. Digambar daerah $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $x + 3y \leq 6$.



Daerah yang memenuhi $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $x + 3y \leq 6$ adalah OCF.

Dibuat garis $x + y = 4$

Perpotongan garis $x + 3y = 6$ dengan $x + y = 4$ adalah di $E(3, 1)$.

Perpotongan garis $y = 0$ dengan $x + y = 4$ adalah di $B(4, 0)$.

Dibuat garis $3x + y = p$ yang melalui $E(3, 1)$ dan $3x + y = q$ yang melalui $B(4, 0)$.

Maka akan didapat nilai $p = 10$ dan $q = 12$.

Garis $3x + y = 12$ memotong garis $x + 3y = 6$ di $D\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right)$ yang membuat $x + y > 4$.

Garis $3x + y = 10$ memotong garis $y = 0$ di $A\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ yang membuat $x + y < 4$.

Karena nilai $x + y$ yang diminta dalam soal adalah nilai maksimum maka persamaan $3x + y \leq a$ yang memenuhi adalah $3x + y \leq 10$.

\therefore Maka nilai a yang memenuhi adalah $a = 10$.

15. Banyaknya sisi dapat dinyatakan dalam luasan.

Luasan yang dicat = $6 \times 5 \times 5 = 150$.

Luasan keseluruhan = $125 \text{ buah} \times 6 \times 1 \times 1 = 750$

Luasan yang tidak dicat = $750 - 150 = 600$

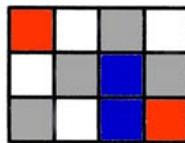
\therefore Rasio sisi yang dicat terhadap yang tidak dicat = $150 : 600 = 1 : 4$.

16. Jika satu kartu ditaruh pada papan maka kartu tersebut akan menutupi satu petak warna hitam dan satu petak warna putih. Maka jelas bahwa dua petak yang dibuang agar dipenuhi bahwa sisa petak dapat ditutupi oleh 7 buah kartu harus memenuhi bahwa kedua petak tersebut berbeda warna.

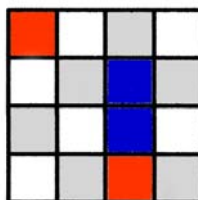
Akan dibuktikan bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu.

Dalam satu baris 4×1 petak maupun dalam satu kolom 1×4 petak, jelas dapat ditutupi oleh dua buah kartu.

- Jika dua petak yang dibuang berada pada satu baris
Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-1 dan 2 atau kolom 3 dan 4 maka sisanya dapat ditutupi oleh 1 buah kartu. Tiga baris sisa akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu. Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-2 dan 3 maka jelas baris tersebut dan baris didekatnya dapat ditutupi oleh 3 buah kartu. Sedangkan 2 baris sisanya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu lagi.
- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke- n sedangkan satu lagi di baris ke- $(n+1)$
Jelas juga bahwa dua baris tersebut dapat ditutupi oleh tiga buah kartu. Dua baris lainnya sesuai dengan keterangan sebelumnya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu.
- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke- n sedangkan satu lagi di baris ke- $(n+2)$
Taruh sebuah kartu dalam arah vertikal sedemikian sehingga terdapat satu baris berisi satu petak yang dibuang dan satu petak lagi merupakan salah satu petak dari kartu yang ditaruh dengan warna kedua petak tersebut berbeda. Maka akan terbentuk 2 bagian. Satu bagian terdiri dari 2 baris dengan 2 petak "dibuang" dan satu baris sisanya terdiri 2 petak yang 'dibuang'. Sesuai dengan keterangan sebelumnya maka sisa petak akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu.



- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-1 sedangkan satu lagi di baris ke-4
Taruh sebuah kartu vertikal dengan kedua petaknya terletak pada baris ke-2 dan ke-3 sedemikian sehingga dua petak pada baris ke-1 dan ke-2 yang tidak dapat ditaruh kartu lagi akan berbeda warna. Maka sesuai dengan keterangan sebelumnya pada baris ke-1 dan ke-2 dapat ditutupi oleh tiga buah kartu lagi. Demikian juga dengan baris ke-3 dan ke-4.



Terbukti bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu..

Banyaknya petak hitam dan putih masing-masing ada 8. Maka banyaknya cara memilih dua petak agar dapat dipenuhi adalah $8 \times 8 = 64$.

∴ Banyaknya cara memilih dua petak = **64**.

(Catatan : Persoalan persegi panjang dengan ukuran yang lebih umum pernah dibahas di www.olimpiade.org. Pembuktian dapat dilakukan dengan induksi matematika)

17. Misalkan bilangan yang dihapus adalah k.

$$\frac{1 + 2 + \dots + n - k}{n - 1} = \frac{602}{17} \rightarrow \frac{n}{2} + \frac{n - k}{n - 1} = 35 \frac{7}{17}$$

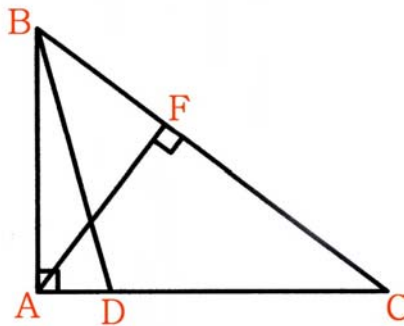
$$\text{Karena } k \geq 1 \text{ maka } n - k \leq n - 1 \rightarrow 0 \leq \frac{n - k}{n - 1} \leq 1 \rightarrow 34 \frac{7}{17} \leq \frac{n}{2} \leq 35 \frac{7}{17} \rightarrow 68 < n \leq 70$$

Jika $n = 70$ maka $k = (1 + 2 + 3 + \dots + 70) - \frac{602}{17} \cdot 69$. Karena 17 tidak membagi 69 maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

$$\text{Jika } n = 69 \text{ maka } k = (1 + 2 + 3 + \dots + 69) - \frac{602}{17} \cdot 68 = 7$$

∴ Maka **n = 69**

18. Misalkan panjang $AC = x$ maka $AD = x - 1$



$$\text{Pada } \triangle AFC \text{ berlaku } AC \cos C = FC \rightarrow \cos C = \frac{1}{x}$$

$$\text{Karena } DC = DB \text{ maka } \triangle DCB \text{ sama kaki} \rightarrow \angle DBC = C \rightarrow \angle BDA = 2C$$

Pada $\triangle BDA$ berlaku :

$$BD \cos \angle BDA = AD \rightarrow 1 \cdot \cos 2C = x - 1 \rightarrow 2\cos^2 C - 1 = x - 1$$

$$\frac{2}{x^2} = x$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

∴ Maka $AC = \sqrt[3]{2}$

$$19. \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54 \rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 108$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{3}$$

Karena x dan y keduanya bilangan asli maka x dan y keduanya harus berbentuk $3k^2$.

Agar didapat solusi x terbesar maka y haruslah minimal. Nilai terkecil y adalah $y = 3$.

$$\text{Maka didapat } \sqrt{x} = 5\sqrt{3} \rightarrow x = 75.$$

\therefore Maka solusi dengan x terbesar adalah $(x, y) = (75, 3)$.

20. Misal koordinat $V_1(x_1, y_1)$ dan $V_2(x_2, y_2)$.

Misalkan juga titik tengah V_1 dan V_2 adalah X_{12} . Maka koordinat X_{12} adalah $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2))$.

Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.

Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.

\therefore Maka anggota V paling sedikit harus 5.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

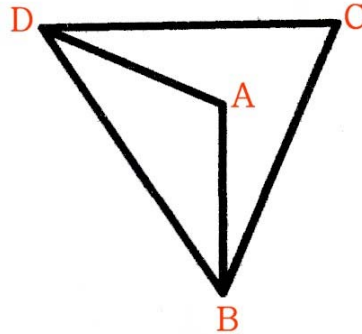
Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST



BAGIAN KEDUA

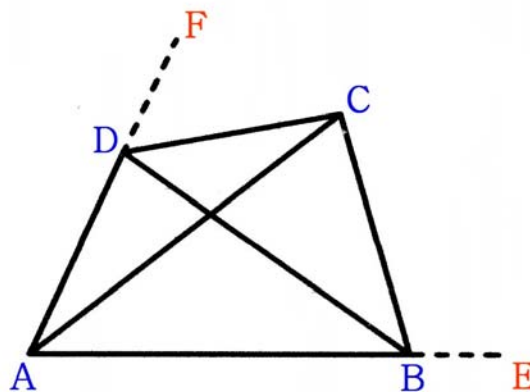
1. (a) Andaikan A berada di dalam segitiga BCD.



Karena panjang sisi-sisi $\triangle BAD$ dan $\triangle BDC$ sama maka $\triangle BAD$ dan $\triangle BCD$ kongruen dan karena sisi BD berhimpit serta $AB = AD = BC = CD$ maka titik A haruslah berhimpit dengan C . Kontradiksi dengan kenyataan bahwa $ABCD$ adalah segiempat.

\therefore **Terbukti bahwa A haruslah berada di luar segitiga BDC.**

- (b) Misalkan $\angle BAD = \alpha$ dan $\angle ABC = \beta$



Pada $\triangle BAD$ dan $\triangle BDC$ berlaku :

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cos \angle BAD$$

$$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cos \angle BCD$$

Karena $AD = AB = CD = CB$ maka $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$

Pada $\triangle ABC$ dan $\triangle ADC$ berlaku :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cos \angle ADC$$

Karena $BA = BC = DA = DC$ maka $\angle ABC = \angle ADC = \beta$

Akibatnya $\alpha + \beta = 180^\circ$

Karena $\alpha + \beta = 180^\circ$ dan $\angle ABC = \beta$ maka $\angle CBE = \alpha$

Karena $\angle DAE = \angle CBE = \alpha$ maka haruslah AD sejajar BC

Karena $\alpha + \beta = 180^\circ$ dan $\angle ADC = \beta$ maka $\angle CDF = \alpha$

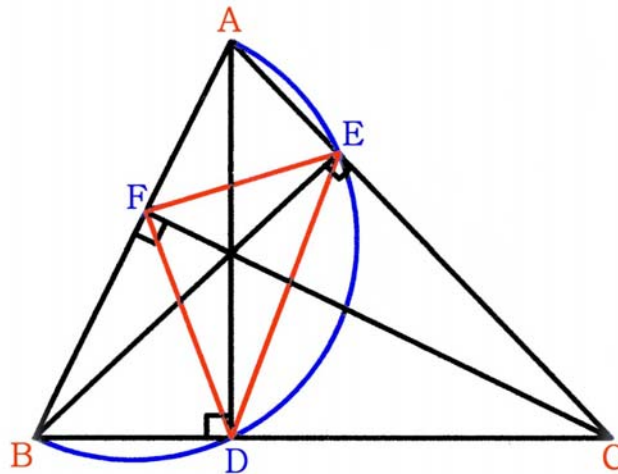
Karena $\angle BAF = \angle CDF = \alpha$ maka haruslah AB sejajar DC

\therefore **Terbukti bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada $ABCD$ selalu sejajar.**

2. Misalkan $\text{FPB}(a, b) = d = 10p + q$ maka $\text{KPK}(a, b) = 10q + p$
 $a = dx$ dan $b = dy$ untuk suatu bilangan asli d, x, y serta $\text{FPB}(x, y) = 1$ dan $x, y \neq 1$
 Karena a dan b simetri dan diinginkan b maksimum maka $b > a \rightarrow y > x$
 Jelas bahwa $\text{KPK}(a, b) = dxy$
 $(10p + q)xy = (10q + p)$
 Karena $10p + q$ dan $10q + p$ keduanya bilangan asli dua angka maka $xy < 10$
 Karena $x, y \neq 1$ dan $\text{FPB}(x, y) = 1$ maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya jika $x = 2$ dan $y = 3$.
 $6(10p + q) = 10q + p \rightarrow 59p = 4q$
 Karena 59 adalah bilangan prima maka q haruslah kelipatan 59. Tetapi q bilangan asli satu angka.
 Maka tidak ada nilai q yang memenuhi.
 \therefore **Tidak ada nilai b yang memenuhi.**

3. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$
 $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - x^2 = 0$
 $((x - 1)^2)^2 - x^2 = 0$
 Mengingat $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ maka :
 $(x^2 - 2x + 1 - x)(x^2 - 2x + 1 + x) = 0$
 $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$
 Karena $(-1)^2 - 4(1)(1) < 0$ maka tidak ada x real yang memenuhi $x^2 - x + 1 = 0$.
 Untuk $x^2 - 3x + 1 = 0$ dipenuhi oleh $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2 \cdot 1} \rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
 \therefore Maka nilai x real yang memenuhi adalah $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ atau $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

4. Misalkan $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$



Karena $\triangle AEB$ siku-siku di E dan $\triangle ADB$ siku-siku di D maka dengan AB sebagai diameter, dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui A, E, D dan B . Maka $AEDB$ adalah segiempat talibusur.
 Karena $AEDB$ adalah segiempat talibusur maka $\angle ABD + \angle AED = 180^\circ$
 $(\beta) + (90^\circ + \angle BED) = 180^\circ \rightarrow \angle BED = 90^\circ - \beta$. Maka $\angle DEC = \beta$

Dengan cara yang sama ACDF adalah segiempat talibusur.

Karena ACDF segiempat talibusur maka $\angle ACD + \angle DFA = 180^\circ$

$$(\gamma) + (90^\circ + \angle CFD) = 180^\circ \rightarrow \angle CFD = 90^\circ - \gamma \rightarrow \angle BFD = \gamma$$

Karena $\triangle BFC$ siku-siku di F maka $\angle BCF = 90^\circ - \beta$

Karena $\triangle BEC$ siku-siku di E maka $\angle EBC = 90^\circ - \gamma$

Pada $\triangle BDF$ berlaku $\frac{DF}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin \gamma}$ (1)

Pada $\triangle CDF$ berlaku $\frac{DF}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{DC}{\sin(90^\circ - \gamma)} \rightarrow \frac{DF}{\cos \beta} = \frac{DC}{\cos \gamma}$ (2)

Pada $\triangle CDE$ berlaku $\frac{DE}{\sin \gamma} = \frac{DC}{\sin \beta}$ (3)

Pada $\triangle BDE$ berlaku $\frac{DE}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \beta)} \rightarrow \frac{DE}{\cos \gamma} = \frac{BD}{\cos \beta}$ (4)

Dari persamaan (1) dan (4) didapat :

$$DE + DF = BD \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \right)$$

Mengingat $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ maka :

$$2 \sin \gamma \cos \beta (DE + DF) = BD (\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \dots\dots\dots (5)$$

Dari persamaan (2) dan (3) didapat :

$$DE + DF = DC \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right)$$

Mengingat $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ maka :

$$2 \sin \beta \cos \gamma (DE + DF) = DC (\sin 2\beta + \sin 2\gamma) \dots\dots\dots (6)$$

Mengingat $\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma = \sin(\beta + \gamma)$ dan $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$ maka :

Persamaan (5) + Persamaan (6) :

$$2 \sin(\beta + \gamma)(DE + DF) = 2 (BD + DC) \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma)$$

$$DE + DF = BC \cos(\beta - \gamma)$$

Mengingat $\cos(\beta - \gamma) \leq 1$ maka $DE + DF \leq BC$ (terbukti)

Tanda kesamaan terjadi apabila $\beta - \gamma = 0$ atau $\beta = \gamma \rightarrow \angle ABC$ sama kaki dengan $AB = AC$ yang berakibat D adalah pertengahan BC.

\therefore Terbukti bahwa **DE + DF \leq BC**

5. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 16 = 136$

Jelas bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 136$.

Misalkan $m = \min(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dan $M = \max(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$

Misalkan juga $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \cdot 136 = 272$

Alternatif 1 :

Andaikan bahwa $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dapat disusun menjadi 8 bilangan berurutan, maka haruslah terdapat nilai n bulat sehingga memenuhi :

$$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2 \cdot 136 = 272$$

$$8n - 4 = 272 \rightarrow \text{Tidak ada n bulat yang memenuhi.}$$

Maka harus terdapat sedikitnya salah satu d_1 atau d_2 yang memenuhi $m < d_i < M$.

- Jika $m < d_1 < M$ dan $d_2 > M$

Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = d_2$ dan $M = m + 8$ dan $d_2 = m + 9$
 $(m) + (m + 1) + \dots + (m + 6) + (m + 8) \leq S \leq (m) + (m + 2) + (m + 3) + \dots + (m + 8)$

$$8m + 29 \leq 272 \leq 8m + 35 \rightarrow 29 < m \leq 30 \rightarrow \text{Nilai } m \text{ yang mungkin hanya } m = 30$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + d_1 = 30 + 31 + 32 + \dots + 38 = 306$$

$$d_1 = 306 - 272 = 34 \rightarrow d_2 = m + 9 = 39$$

Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$

Contoh *antimagic* yang memenuhi nilai maksimumnya = 39

15	2	12	4	33	
1	14	10	5	30	
8	9	3	16	36	
11	13	6	7	37	
34	35	38	31	32	39

- Jika $m < d_1 < d_2 < M$

Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = M$ dan $M = m + 9$

$$(m) + (m + 1) + \dots + (m + 6) + (m + 9) \leq S \leq (m) + (m + 3) + (m + 4) + \dots + (m + 9)$$

$$8m + 30 \leq 272 \leq 8m + 42 \rightarrow 28 < m \leq 30 \rightarrow \text{Nilai } m \text{ yang mungkin hanya } m = 29 \text{ atau } 30$$

Karena ingin dicapai nilai M maksimum maka dipilih $m = 30 \rightarrow M = m + 9 = 39$

Alternatif 2 :

Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ semakin besar apabila m semakin besar.

Jika $m \geq 31$ maka $31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 \leq S \rightarrow 276 \leq 272$ (tidak memenuhi)

Maka tidak mungkin $\min(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4) \geq 31 \rightarrow m \leq 30$

Jika $m = 30$ maka $30 + 31 + 32 + \dots + 37 \leq S \leq 32 + 33 + 34 + \dots + 39 \rightarrow 268 \leq 272 \leq 284$

Ada kemungkinan terdapat *antimagic* yang memenuhi $m = 30$.

Jika ada *antimagic* yang memenuhi untuk $m = 30$ maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$.

Contoh *antimagic* yang memenuhi untuk $m = 30$.

15	2	12	4	33	
1	14	10	5	30	
8	9	3	16	36	
11	13	6	7	37	
34	35	38	31	32	39

Untuk $m < 30$ tidak perlu dicari sebab nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ akan semakin kecil.

\therefore Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$.