SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya bilangan bulat antara a dan b adalah a − b − 1. Karena a dan b ganjil, maka banyaknya bilangan genap di antara a dan b lebih satu dari banyaknya bilangan ganjil di antara a dan b.

   Maka banyaknya bilangan bulat genap dirumuskan dengan $\frac{(a-b-1)+1}{2}$.

   ∴ Banyaknya bilangan genap di antara a dan b adalah $\frac{a-b}{2}$

2. Misal nilai ulangan ke-2 Agung = x, maka $\frac{(85)+(x)+(x-4)}{3} = 81 \rightarrow 81 + 2x = 81 \cdot 3 \rightarrow x = 81$

   ∴ Nilai ulangan Agung ke-2 = 81

3. * Untuk $x \le -2$, maka $|x + 2| = -x - 2$ dan $|3x| = -3x$
     $|x + 2| + |3x| = 14 \rightarrow -x - 2 - 3x = 14 \rightarrow x = -4$ (memenuhi bahwa $x \le -2$)
   * Untuk $-2 \le x \le 0$ maka $|x + 2| = x + 2$ dan $|3x| = -3x$
     $|x + 2| + |3x| = 14 \rightarrow x + 2 - 3x = 14 \rightarrow x = -6$ (tidak memenuhi bahwa $-2 \le x \le 0$)
   * Untuk $x \ge 0$ maka $|x + 2| = x + 2$ dan $|3x| = 3x$
     $|x + 2| + |3x| = 14 \rightarrow x + 2 + 3x = 14 \rightarrow x = 3$ (memenuhi bahwa $x \ge 0$)

   ∴ Himpunan jawab dari persamaan $|x + 2| + |3x| = 14$ adalah = { −4, 3}

4. $$\boxed{N} = \boxed{A} - \frac{\boxed{B}}{\boxed{D}} \cdot \boxed{C}$$

   Teori : Agar T – M maksimal, maka T harus sebesar-besarnya dan M harus sekecil-lecilnya.
   Jika diinginkan N sebesar-besarnya, maka A dan D harus maksimal dengan A > D sedangkan B dan C harus minimum dan karena B · C = C · B, maka tidak ada pengaruh posisi B dan C.
   Berarti A = 8, B = 3, C = 5, D = 7 atau A = 8, B = 5, C = 3, D = 7

   ∴ $N = 8 - \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{41}{7}$

5. Karena faktor persekutuan terbesar dari x, y, z adalah 12, maka x, y, z akan berbentuk x = 12a, y = 12b dan z = 12c dengan a, b dan c adalah bilangan bulat FPB(a, b, c) = 1
   Dan karena 840 : 12 = 70, maka a, b dan c masing-masing harus faktor dari 70. Nilai a, b dan c harus diambil dari faktor-faktor 70 yaitu : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 dan 70.
   Karena diinginkan nilai x + y + z yang terbesar maka nilai a + b + c juga harus yang terbesar. Karena FPB (14, 35, 70), FPB (10, 35, 70), FPB (7, 35, 70), FPB (5, 35, 70) semuanya lebih dari 1 maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70 atau 10, 14, 35 dan karena 2 + 35 + 70 > 10 + 14 + 35 maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70.

   ∴ $(x + y + z)_{terbesar} = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 35 + 12 \cdot 70 = 1284$

6. Misal N = $\underbrace{20032003\cdots2003}_{k}$.

Agar N habis dibagi 9 maka jumlah digit N harus habis dibagi 9.
Karena 2 + 0 + 0 + 3 = 5 maka jumlah digit N = 5k.
∴ Bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi adalah **k = 9**

7. $x_{1,2} = \dfrac{4a + 2 \pm \sqrt{(4a+2)^2 - 4(2)(a^2 - a)}}{2 \cdot 2} = a + \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$

* Akar−akarnya real berarti Disk ≥ 0 → Disk = $(4a + 2)^2 - 4(2)(a^2 - a) \geq 0$
$8a^2 + 24a + 4 \geq 0$ → $2a^2 + 6a + 1 \geq 0$

$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(1)}}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

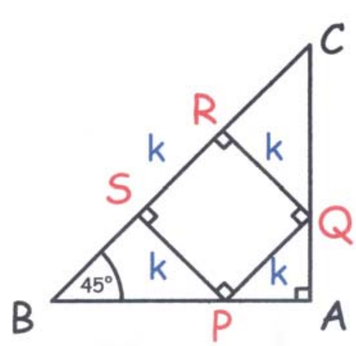
Nilai a yang memenuhi adalah $a \leq -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ atau $a \geq -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$

* $a < x_2$ → $a < a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ → $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > -1$
Akar dari suatu bilangan bernilai positif sehingga semua nilai a memenuhi.

* $a > x_1$ → $a > a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ → $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > 1$
$2a^2 + 6a + 1 > 1$
$2a(a + 3) > 0$
Nilai a yang memenuhi adalah $a < -3$ atau $a > 0$

Karena $\sqrt{7} < 3$ maka $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7} > -3$ dan $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} < 0$.
Irisan dari ketiga penyelesaian untuk a adalah $a < -3$ atau $a > 0$
∴ Maka nilai a yang memenuhi adalah **$a < -3$ atau $a > 0$**

8.



Misal PQ = QR = RS = PS = k

$\angle ACB = \angle ABC = \angle APQ = \angle AQP = \angle BPS = \angle CQR = 45^o$

Maka BS = CR = k → BP = CQ = $k\sqrt{2}$

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}\left(k\sqrt{2} + \frac{1}{2}k\sqrt{2}\right)\left(k\sqrt{2} + \frac{1}{2}k\sqrt{2}\right) = x$

$k^2 = \frac{4x}{9}$

∴ Luas persegi PQRS = $\frac{4x}{9}$

9. Karena nilai terkecil dadu = 1, maka n ≤ 6.

∗ Untuk n = 1

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6}$

∗ Untuk n = 2

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) = 5

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

∗ Untuk n = 3

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1) = 10

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^3} = \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

∗ Untuk n = 4

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (1,3,1,1), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), (3,1,1,1) = 10

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^4} = \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

∗ Untuk n = 5

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,2), (1,1,1,2,1), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1), (2,1,1,1,1) = 5

Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

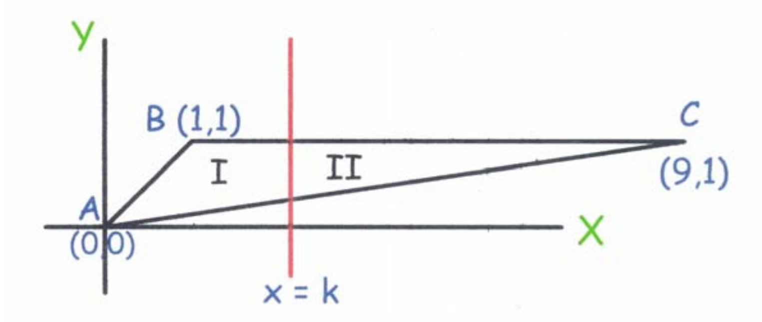
∗ Untuk n = 6

Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,1,1) = 1

Peluang jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6^6} < \frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

∴ Peluang terbesar adalah jika n = 1

10.



Misal persamaan garis vertikal tersebut adalah x = k

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}(9 - 1)(1 - 0) = 4$

Persamaan garis melalui (0,0) dan (9,1) adalah $y = \frac{1}{9}x$

Untuk x = k maka $y = \frac{1}{9}k$

Luas Δ II = $\frac{1}{2}$ Luas ΔABC

$\frac{1}{2}(9 - k)(1 - \frac{1}{9}k) = \frac{1}{2} \cdot 4$

$9 - k = \pm 6 \rightarrow k = 3$ (memenuhi) atau $k = 15$ (tidak memenuhi bahwa $0 \le k \le 9$)

$\therefore$ Persamaan garis vertikal tersebut adalah **x = 3**

11. $m^2 - 2003 = n^2 \rightarrow m^2 - n^2 = 2003$

$(m + n)(m - n) = 2003$

2003 adalah bilangan prima sehingga persamaan dipenuhi hanya jika m + n = 2003 dan m − n = 1

m = 1002 dan n = 1001

$\therefore$ mn = 1002 · 1001 = **1003002**

12. ${}^4\log\left({}^2\log x\right) + {}^2\log\left({}^4\log x\right) = 2$

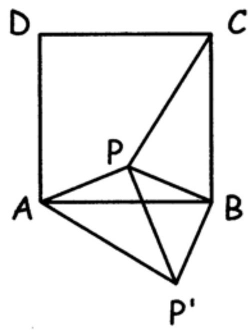
${}^2\log\left({}^2\log x\right)^{1/2} + {}^2\log\left({}^2\log\sqrt{x}\right) = 2$

$\sqrt{{}^2\log x} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x = 2^2 = 4$

$\left({}^2\log x\right)^{3/2} = 8 \rightarrow x = 2^4$

$\therefore$ **x = 16**

13.



Misalkan AP = a maka BP = 2a dan CP = 3a

Dengan berpusat di B, titik P diputar sejauh 90^o menjadi titik P'. maka ΔPBP' adalah segitiga siku-siku sama kaki.

$\angle BPP' = 45^o$ dan $PP' = 2a\sqrt{2}$

$\Delta BPC \cong \Delta AP'B$ sehingga $AP' = 3a$

$(AP')^2 = (AP)^2 + (PP')^2 - 2(AP)(PP')\cos \angle APP'$

$(3a)^2 = (a)^2 + (2a\sqrt{2})^2 - 2(a)(2a\sqrt{2})\cos \angle APP'$

$\cos \angle APP' = 0 \rightarrow \angle APP' = 90^o$

$\therefore$ $\angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^o + 45^o = 135^o$

14. * Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tidak ikut dicampur
Salah satu perbandingan yang menghasilkan warna adalah 0:0:1. Karena ada 3 warna, maka akan ada 3 warna yang dihasilkan dari perbandingan ini. Perbandingan 0:0:2, 0:0:3, 0:0:4, 0:0:5 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 0:0:1. Perbandingan lainnya yang memenuhi adalah 0:1:1, 0:1:2, 0:1:3, 0:1:4, 0:1:5, 0:2:3, 0:2:5, 0:3:4, 0:3:5, 0:4:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 11 = 33.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tepat 1 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 1:1:1, 1:1:2, 1:1:3, 1:1:4, 1:1:5, 1:2:2, 1:2:3, 1:2:4, 1:2:5, 1:3:3, 1:3:4, 1:3:5, 1:4:4, 1:4:5, 1:5:5. Perbandingan 1:1:1 hanya ada 1 kemungkinan.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 1 + 3 x 14 = 43.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tepat 2 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 2:2:3, 2:2:5, 2:3:3, 2:3:4, 2:3:5, 2:4:5, 2:5:5. Perbandingan 2:2:2 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 1:1:1. Hal yang hampir sama berhubungan dengan perbandingan 2:2:4 dan 2:4:4.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 7 = 21.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tepat 3 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 3:3:4, 3:3:5, 3:4:4, 3:4:5, 3:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 5 = 15.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tepat 4 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 4:4:5, 4:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 2 = 6.

$\therefore$ Banyaknya warna keseluruhan yang dihasilkan adalah 33 + 43 + 21 + 15 + 6 = 118.

15. Misal harga jual masing-masing mobil = p

Misal harga pembelian mobil pertama = y_1

$y_1 + 0{,}3y_1 = p \rightarrow y_1 = \frac{10}{13}p$

Misal harga pembelian mobil kedua = y_2

$y_2 - 0{,}2y_2 = p \rightarrow y_2 = \frac{5}{4}p$

Harga pembelian total = $y_1 + y_2 = \frac{10}{13}p + \frac{5}{4}p = \frac{105}{52}p$

Selisih = $2p - \frac{10}{13}p - \frac{5}{4}p = -\frac{1}{52}p$

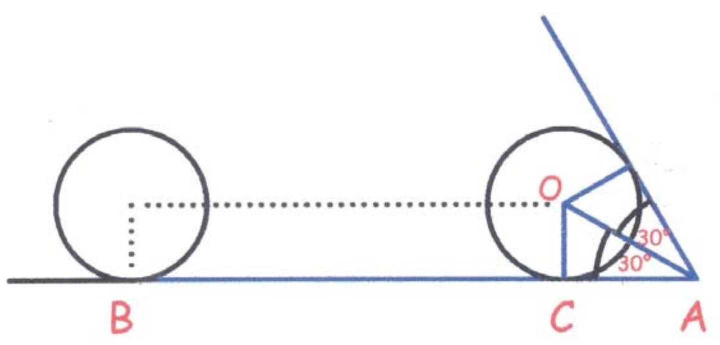
Kerugian Pak Oto = $\dfrac{-\frac{1}{52}p}{\frac{105}{52}p}$ x 100 % = $-\frac{100}{105}$ %

$\therefore$ Kerugian Pak Oto = $-\frac{20}{21}$ %

16. Banyaknya cara duduk masing-masing kelompok adalah sama dengan menempatkan 4 obyek pada 4 tempat = ${}_4P_4$ = 24.

$\therefore$ Banyaknya cara memberikan tempat duduk kepada mereka adalah = 2 · 24 · 24 = 1152 cara.

17.



BC = 10 · 2πr = 20πr

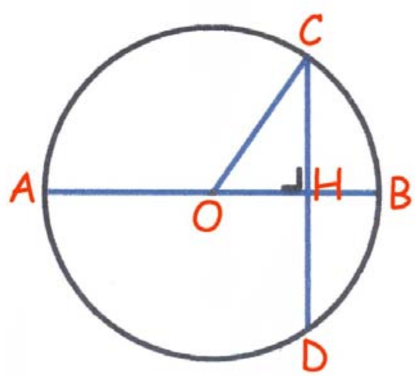
CA = OC · cotg 30° = r√3

AB = BC + CA = 20πr + r√3

$\therefore$ Jarak dari B ke A = (20π + √3)r

18. Misal $P = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$
$T = 2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + \cdots + 100 \cdot 99! + 101 \cdot 100! = 2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101!$
$T - P = (2-1)\,1! + (3-2)\,2! + (4-3)\,3! + \cdots + (100-99)\,99! + (101-100)\,100!$
$T - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$
$2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101! - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$
$P = 101! - 1! = 101! - 1$
101! Adalah bilangan yang habis dibagi 101, maka $P = 101! - 1 = 101k + 101 - 1 = 101k + 100$
$\therefore$ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ Dibagi 101 akan bersisa **100**

19.



Misal panjang $AB = ab = 10a + b$ → $OC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}(10a + b)$
Panjang $CD = ba = 10b + a$ → $CH = \frac{1}{2}(10b + a)$
Dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $0 < a \le 9$, $0 < b \le 9$

$$OH = \sqrt{(OC)^2 - (CH)^2}$$
$$OH = \frac{1}{2}\sqrt{(10a + b)^2 - (10b + a)^2}$$
$$OH = \frac{3}{2}\sqrt{11(a + b)(a - b)}$$

Karena OH adalah bilangan rasional dan $a + b > a - b$ maka :
$a + b = 11k$ dan $a - b = k$ dengan k adalah bilangan rasional
Didapat $2a = 12k$ → $a = 6k$ dan $2b = 10k$ → $b = 5k$

$$\frac{a}{b} = \frac{6k}{5k} = \frac{6}{5}$$

Karena a dan b adalah bilangan bulat dan $0 < a \le 9$, $0 < b \le 9$ maka $a = 6$ dan $b = 5$
Panjang AB = **65**

20. Misal H = {1, 2, 3, ⋯, 9, 10}

∗ Banyaknya 2 bilangan berurutan dari himpunan H ada 9 yaitu : (1,2), (2,3), (3,4), ⋯, (9,10)

∗ Menentukan 3 bilangan dari H yang 2 berurutan namun ketiganya tidak berurutan :

Untuk (1,2) hanya ada satu bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 3. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (1,2) namun bilangan ketiga bukan 3 ada 7, yaitu : (1,2,4), (1,2,5), ⋯, (1,2,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (9,10)

Untuk (2,3) ada dua bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 1 dan 4. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (2,3) namun bilangan ketiga bukan 1 atau 4 ada 6, yaitu : (2,3,5), (2,3,6), ⋯, (2,3,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (3,4), (4,5), ⋯, (8,9).

Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 di antaranya berurutan namun ketiga bilangan tersebut tidak berurutan adalah = $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 56$.

∗ Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang ketiganya berurutan = 8, yaitu : (1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), ⋯, (7,8,9), (8,9,10).

∗ Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H = ${}_{10}C_3 = 120$.

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = 120 − 56 − 8 = **54**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Pernyataan-pernyataan :
   a. Andi berkata bahwa Beni adalah kancil
   b. Coki berkata bahwa Doni adalah serigala
   c. Edo berkata Andi bukan serigala
   d. Beni berkata Coki bukan kancil
   e. Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang berbeda

   - Misalkan Andi adalah kancil.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah kancil.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah serigala.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah kancil.
     Berdasarkan (e) karena Andi kancil maka Edo adalah serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala. Pernyataan ini kontradiksi dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

   - Misalkan Andi adalah serigala.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah serigala.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah kancil.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah serigala.
     Berdasarkan (e) maka Edo dan Andi sejenis. Karena Andi serigala maka Edo juga serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala yang berarti sesuai dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

   Yang termasuk kancil adalah Coki dan yang termasuk serigala adalah Andi, Beni, Doni dan Edo.

   $\therefore$ Banyaknya serigala ada 4

2. Karena $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional maka $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q adalah bilangan asli dan q ≠ 0 serta p dan q relatif prima.

   $q\sqrt{2} + q\sqrt{a} = p\sqrt{3} + p\sqrt{b} \quad \rightarrow \quad \left(q\sqrt{2} - p\sqrt{3}\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$

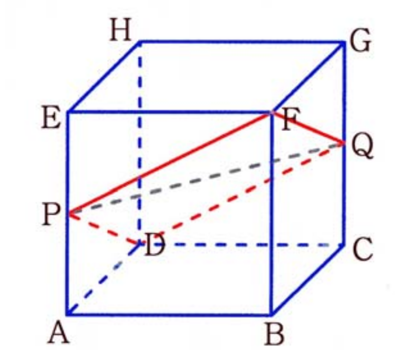
   $2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = p^2 b + q^2 a - 2pq\sqrt{ab}$

   Karena a, b, p dan q adalah bilangan asli maka 6 = ab. Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1,6) ; (2,3) ; (3,2) ; (6,1). Subtitusikan keempat pasangan ini ke persamaan semula untuk dicek apakah memenuhi bilangan rasional atau tidak. Jika dicek maka pasangan (a,b) yang akan membuat persamaan semula merupakan bilangan rasional adalah (3,2).

   $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1$

   $\therefore$ a = 3 dan b = 2

3.



Karena bidang ADHE sejajar dengan BCGF dan bidang ABFE sejajar dengan bidang DCGH maka DP sejajar FQ dan FP sejajar DQ.

$$PF = DP = DQ = FQ = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

PQ sejajar AC → PQ = AC = $\sqrt{2}$

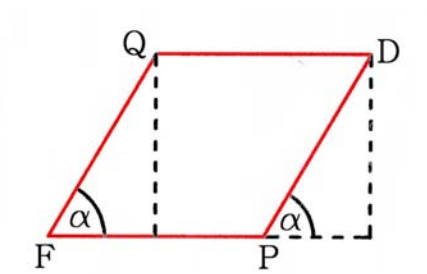
Alternatif 1 :

Mencari sudut PFQ. Misal $\angle PFQ = \alpha$

$$(PQ)^2 = (PF)^2 + (FQ)^2 - 2(PF)(FQ)\cos\alpha$$

$$2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{6}$$



Luas segi empat DPFQ = (FP)(PD)sin α

Luas segi empat DPFQ = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

∴ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Alternatif 2 :

Karena PF = DP = DQ = FQ maka segiempat DPFQ adalah belah ketupat. Diagonal PQ = $\sqrt{2}$ sedangkan diagonal DF adalah diagonal ruang maka FD = $\sqrt{3}$.

Luas segiempat DPFQ = $\frac{1}{2}$ · PQ · FD = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

∴ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

4. *Teori* : Rataan Geometri ≤ Rataan Aritmatika

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

Tanda kesamaan berlaku jika $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n$. Maka :

$$\sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 998 \cdot 999} < \frac{1+2+3+\cdots+998+999}{999}$$

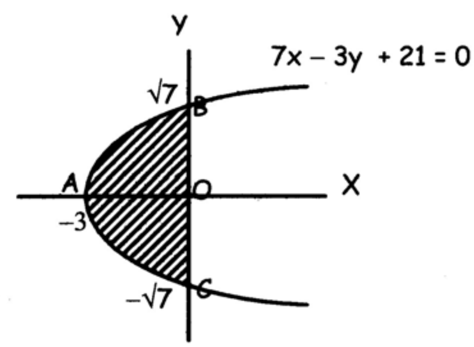
$$\sqrt[999]{999!} < \frac{1}{999} \cdot \frac{999}{2}(1+999)$$

$$\sqrt[999]{999!} < 500$$

∴ Terbukti bahwa $999! < 500^{999}$

5. $7x - 3y^2 + 21 = 0$ → $7x = 3y^2 - 21$ → $x = \frac{3}{7}\left(y+\sqrt{7}\right)\left(y-\sqrt{7}\right)$

merupakan suatu persamaan parabola dengan puncak di (−3,0) dan titik potong dengan sumbu Y di (0,√7) dan (0,−√7). Tampak bahwa ada 2 daerah. Satu daerah di atas sumbu X dan satu daerah lagi di bawah sumbu X.



Jarak AB = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0-\sqrt{7}\right)^2} = 4$

Jarak AC = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0-(-\sqrt{7})\right)^2} = 4$

Untuk $0 \le y \le \sqrt{7}$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan B dengan jarak AB = 4.

Untuk $-\sqrt{7} \le y \le 0$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan C dengan jarak AC = 4.

Karena ada 3 buah titik dan ada 2 daerah maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka sekurang-kurangnya ada 2 titik dalam satu daerah yaitu memiliki ordinat $0 \le y \le \sqrt{7}$ atau $-\sqrt{7} \le y \le 0$.

∴ Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika 3 titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu Y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$, maka sedikitnya 2 titik di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.