

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2006  
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

*Prestasi itu diraih bukan didapat !!!*

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2006

### BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)

Tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah 53, 59 dan 61.

$$53 + 59 + 61 = 173$$

∴ Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 = **173**

2. (Jawaban : E)

Kemungkinan kedua bola tersebut adalah keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.

$$\text{Peluang} = \frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} + \frac{{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2}$$

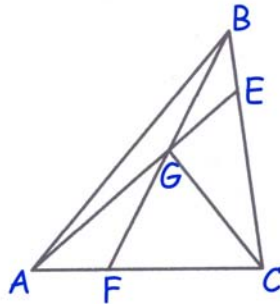
$$\therefore \text{Peluang} = \frac{11}{21}$$

3. (Jawaban : B)

$$X = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore X = \frac{5}{12}$$

4. (Jawaban : B)



Misalkan tanda [KML] menyatakan luas  $\Delta KML$

Misalkan [ABC] = X. Karena AF : FC = 1 : 2 maka [ABF] =  $\frac{1}{3}$  [ABC] =  $\frac{1}{3}$  X

Karena G pertengahan BF maka [ABG] =  $\frac{1}{2}$  [ABF] =  $\frac{1}{6}$  X = [AFG]

Karena AF : FC = 1 : 2 maka [CGF] = 2 [AFG] =  $\frac{1}{3}$  X  $\rightarrow$  [CGB] =  $\frac{1}{3}$  X

Misalkan [CGE] = P dan [EGB] = Q

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2006

$$\frac{BE}{EC} = \frac{Q}{P} = \frac{Q + X/6}{P + X/3 + X/6}$$

$$6PQ + 3XQ = 6PQ + PX$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{3} \rightarrow BE : EC = 1 : 3$$

∴ Titik E membagi BC dalam perbandingan = 1 : 3

5. (Jawaban : D)

Misalkan banyaknya orang = n

$${}_n C_2 = 28 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28$$

$$n^2 - n - 56 = 0 \rightarrow (n-8)(n+7) = 0$$

∴ Banyaknya orang yang hadir = 8

6. (Jawaban : C)

Misal gaji Andika sebelum kenaikan = A dan setelah memperoleh kenaikan gaji gajinya menjadi  $A_x$ .

Gaji David sebelum kenaikan = 1,2A .

$$A_x = 1,2 \cdot (1,2A) = 1,44A$$

$$\text{Kenaikan gaji Andika} = 1,44A - A = 0,44A$$

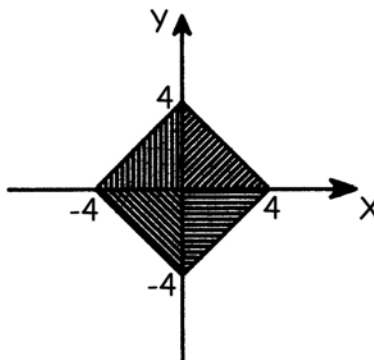
∴ Kenaikan gaji Andika adalah **44 %**

7. (Jawaban : E)

$$|x| + |y| \leq 4$$

- Jika x dan y di kuadran I maka  $|x| = x$  dan  $|y| = y$ . Persamaannya adalah  $x + y \leq 4$
- Jika x dan y di kuadran II maka  $|x| = -x$  dan  $|y| = y$ . Persamaannya adalah  $-x + y \leq 4$
- Jika x dan y di kuadran III maka  $|x| = -x$  dan  $|y| = -y$ . Persamaannya adalah  $-x - y \leq 4$
- Jika x dan y di kuadran IV maka  $|x| = x$  dan  $|y| = -y$ . Persamaannya adalah  $x - y \leq 4$

Gambar persamaan-persamaan tersebut adalah :



Karena panjang sisi-sisinya sama yaitu  $4\sqrt{2}$  sedangkan kedua diagonalnya saling tegak lurus maka luasan berupa persegi.

$$\text{Luas daerah T} = 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$$

∴ Luas daerah T = 32

8. (Jawaban : A)

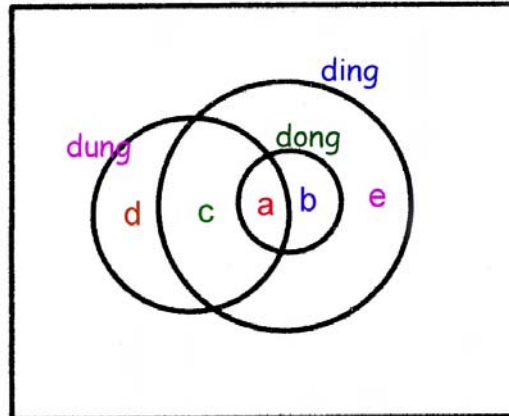
$$a * b = a + b + 1$$

$$a * p = a + p + 1$$

$$a = a + p + 1$$

$$\therefore p = -1$$

9. (Jawaban : D)



Karena setiap dong adalah ding maka dong merupakan himpunan bagian dari ding.

Karena beberapa dung juga dong maka dung dan dong memiliki irisan. Maka a pasti ada.

Karena a pasti ada maka a merupakan dong yang ding sekaligus dung (pernyataan X benar)

Karena a pasti ada maka a adalah merupakan ding yang sekaligus dung (pernyataan Y benar).

Dong yang bukan dung adalah b. Karena b belum pasti ada maka pernyataan Z belum dapat dibuktikan kebenarannya.

$\therefore$  X dan Y keduanya benar.

10. (Jawaban : A)

$$3x + 5y = 501$$

$$5y = 3(167 - x)$$

Karena 3 dan 5 relatif prima maka  $y = 3k$  dan  $167 - x = 5k$  untuk suatu k bulat positif.

Jelas bahwa  $0 < 5y \leq 501$  dan  $0 < 3x \leq 501 \rightarrow 0 < y \leq 100$  dan  $0 < x \leq 167$

Karena terdapat 100 nilai y yang memenuhi dan 167 nilai x yang memenuhi maka banyaknya nilai k

yang memenuhi adalah  $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$  atau  $\left\lfloor \frac{167}{5} \right\rfloor = 33$  yaitu  $1 \leq k \leq 33$ .

Contoh : Jika  $k = 1$  maka  $y = 3$  dan  $x = 162$  memenuhi.  $(k, x, y) = (2, 157, 6) ; (3, 152, 9) ; \dots$  juga memenuhi.

$\therefore$  Banyaknya pasangan  $(x, y)$  yang memenuhi adalah **33**

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2006

---

### BAGIAN KEDUA

11.  $a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + 50 = 1139$ .

Banyaknya bilangan  $a, (a + 1), (a + 2), \dots, 50$  adalah  $51 - a$

$$(51 - a) \cdot (a + 50) = 2 \cdot 1139 = 2278 \rightarrow a^2 - a - 272 = 0 \rightarrow (a - 17)(a + 16) = 0$$

$$\therefore a = 17$$

12. Karena pakaian Elsi baik dengan Putri maupun Rita berbeda maka Putri dan Rita memakai pakaian yang sama.

Karena Arinta, Putri dan Rita memakai pakaian yang sama maka ketiganya tidak mungkin memakai rok. Maka Arinta, Putri dan Rita memakai celana panjang sedangkan Elsi dan Venny memakai rok.

$\therefore$  Kedua gadis yang memakai rok adalah **Elsi dan Venny**.

13. Bilangan kuadrat yang sekaligus juga bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.

Bilangan kuadrat  $\leq 265$  adalah  $1^2, 2^2, \dots, 16^2$  ada sebanyak 16 bilangan.

Bilangan pangkat tiga  $\leq 265$  adalah  $1^3, 2^3, \dots, 6^3$  ada sebanyak 6 bilangan.

Bilangan pangkat enam  $\leq 265$  adalah  $1^6$  dan  $2^6$  ada sebanyak 2 bilangan.

Banyaknya bilangan yang bukan pangkat dua atau pangkat tiga yang  $\leq 265 = 16 + 6 - 2 = 20$ .

Maka 265 adalah suku ke  $265 - 20 = 245$ .

Lima bilangan setelah 265 yang bukan bilangan kuadrat atau pangkat tiga adalah 266, 267, 268, 269 dan 270.

$\therefore$  Suku ke-250 dari barisan tersebut adalah **270**

14.  $f(xy) = f(x + y)$

Jika  $x = n$  dan  $y = 1$  maka  $f(n) = f(n + 1)$

Maka  $f(49) = f(48) = f(47) = f(46) = \dots = f(7)$

$$\therefore f(49) = 7$$

15.  $u_{25} = 3(u_5) \rightarrow a + 24b = 3(a + 4b) \rightarrow a = 6b$

$$u_n = a + (n - 1)b = 2u_1 = 2a$$

$$6b + (n - 1)b = 2(6b) \rightarrow n = 7$$

$\therefore$  Suku tersebut adalah suku ke-**7**

16. Misalkan hari ini adalah hari ke-0

Karena kemarin Dimas membeli majalah sedangkan Dimas membeli setiap 5 hari sekali maka Dimas akan membeli majalah pada hari  $h_1 = 5k + 4$  dengan  $k$  bilangan asli.

Karena hari ini Andre membeli majalah sedangkan Andre membeli setiap 8 hari sekali maka Andre akan membeli majalah pada hari  $h_2 = 8n$  dengan  $n$  bilangan asli.

Mereka akan membeli majalah pada hari yang sama jika  $5k + 4 = 8n$ .

Karena 4 dan 8 keduanya habis dibagi 4 maka  $k$  harus habis dibagi 4. Nilai  $k$  terkecil adalah 4.

$$h_1 = h_2 = 5(4) + 4 = 24$$

$\therefore$  Maka mereka akan membeli majalah pada hari yang sama paling cepat **24** hari lagi.

## Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2006

17. Misalkan bilangan tersebut adalah  $1000a + 100b + 10c + d$   
Maka  $1000a + 100b + 10c + d - a - b - c - d = 2007$   
 $999a + 99b + 9c = 2007 \rightarrow 111a + 11b + c = 223$   
Karena  $a > 0$  dan  $111a < 223$  maka  $a = 1$  atau  $2$ .  
Jika  $a = 1$  maka  $11b + c = 112 > 11(9) + 9 = 108$  (tidak ada nilai  $b$  dan  $c$  yang memenuhi)  $\rightarrow a = 2$   
Karena  $a = 2$  maka  $11b + c = 1$ . Nilai  $b$  dan  $c$  yang memenuhi hanya  $b = 0$  dan  $c = 1$ .  
Tripel  $(a, b, c)$  yang memenuhi hanya ada 1 kemungkinan yaitu  $(2, 0, 1)$ . Nilai  $d$  yang memenuhi ada 10 kemungkinan yaitu  $0, 1, 2, \dots, 9$ .  
Bilangan 4 angka tersebut yang memenuhi ada 10 yaitu  $2010, 2011, 2012, 2013, 2014, \dots, 2019$ .  
 $\therefore$  Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari **10**.

18. Persamaan parabola yang berpuncak di  $(x_p, y_p)$  adalah  $y = a(x - x_p)^2 + y_p$ .  
Karena titik puncak parabola di  $(4, 2)$  maka  $y = a(x - 4)^2 + 2$   
Karena titik  $(2, 0)$  terletak pada parabola maka :  
 $0 = a(2 - 4)^2 + 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$   
Persamaan parabola tersebut adalah  $y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$   
 $a = -\frac{1}{2}$  ;  $b = 4$  dan  $c = -6$   
 $\therefore abc = 12$

19. Persamaan garis  $\ell_1$  adalah  $y + 3 = -2(x - p)$   
Karena  $\ell_2$  tegak lurus  $\ell_1$  maka gradien garis  $\ell_2$  adalah  $\frac{1}{2}$ .  
Persamaan garis  $\ell_2$  adalah  $y - p = \frac{1}{2}(x - 6)$   
Kedua garis melalui  $a, b$  maka :  
 $b + 3 = -2(a - p)$  dan  $b - p = \frac{1}{2}(a - 6)$   
 $3 + p = -2(a - p) - \frac{1}{2}(a - 6)$   
 $6 + 2p = -4a + 4p - a + 6 \rightarrow a = \frac{2}{5}p$   
 $\therefore a = \frac{2}{5}p$

20. Misalkan  $\angle ABC = \beta$   
Luas  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \sin \beta = 54$   
Karena  $MD$  sejajar  $EC$  maka  $\triangle BMD$  sebangun dengan  $\triangle BEC$   
 $\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC} \rightarrow BM \cdot BC = BD \cdot BE$   
Luas  $\triangle BED = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BD \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot BC \sin \beta$   
Luas  $\triangle BED = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \sin \beta)$   
Luas  $\triangle BED = \frac{1}{2}$  Luas  $\triangle ABC$   
 $\therefore$  Luas segitiga  $BED$  adalah **27**

