

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2004
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2005

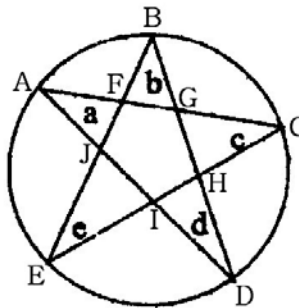
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{(1 - 2)(2^2 - 3)} = -1$$

$\therefore \frac{1}{(1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})}$ adalah bilangan **bulat negatif**.

2. (Jawaban : B)



Misalkan penamaan titik seperti pada gambar.

Pada $\triangle EFC$ berlaku $\angle EFC = 180^\circ - (c + e) \rightarrow \angle BFG = c + e$

Pada $\triangle AGD$ berlaku $\angle AGD = 180^\circ - (a + d) \rightarrow \angle FGB = a + d$

Pada $\triangle FGB$ berlaku $\angle BFG + \angle FGB + \angle FBG = 180^\circ \rightarrow (c + e) + (a + d) + (b) = 180^\circ$.

$\therefore a + b + c + d + e = 180^\circ$.

3. (Jawaban : B)

Kenaikan harga dari semangkok bakso dan segelas jus = $\frac{16\% \cdot 5000 + 4\% \cdot 5000}{5000 + 5000} = 10\%$

\therefore Kenaikan harga dari semangkok bakso dan segelas jus adalah **10 %**.

4. (Jawaban : ?)

$a^2 < a \rightarrow a(a - 1) < 0 \rightarrow 0 < a < 1$.

\therefore Jika $a^2 < a$ maka $0 < a < 1$.

5. (Jawaban : B)

$$y = x^2 - 6x + 7$$

Nilai pada ujung-ujung interval : $x = 0 \rightarrow y = 7$ sedangkan $x = 4 \rightarrow y = -1$

$$-\frac{D}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(7)}{4(1)} = -2$$

\therefore Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar adalah **-2 dan 7**.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2005

6. (Jawaban : C)

Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 6 ada 5, yaitu (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).
Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 8 ada 5, yaitu (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{5+5}{36}$

∴ Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{10}{36}$

7. (Jawaban : D)

Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$

Karena $0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ maka pasangan (x, y) yang memenuhi ada 12, yaitu (0, 5), (0, -5), (5, 0), (-5, 0), (3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4), (4, 3), (4, -3), (-4, 3) dan (-4, -3).

∴ Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 ada **12**.

8. (Jawaban : C)

Karena 5^k memiliki angka satuan 5 untuk setiap k asli maka $5^{5^{5^5}}$ memiliki angka terakhir 5.

Karena 6^k memiliki angka satuan 6 untuk setiap k asli maka $6^{6^{6^6}}$ memiliki angka terakhir 6.

Karena 10^k memiliki angka satuan 0 untuk setiap k asli maka $10^{10^{10^{10}}}$ memiliki angka terakhir 0.

8^1 memiliki angka satuan 8

8^2 memiliki angka satuan 4

8^3 memiliki angka satuan 2

8^4 memiliki angka satuan 6

8^5 memiliki angka satuan 8 dst

Maka $8^{4^{k+i}} \equiv 8^i \pmod{10}$ untuk setiap k dan i bilangan asli.

Karena 8^{8^8} habis dibagi 4 maka $8^{8^{8^8}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 8^4 yaitu 6.

9^1 memiliki angka satuan 9

9^2 memiliki angka satuan 1

9^3 memiliki angka satuan 9 dst

Maka $9^{2^{k+i}} \equiv 9^i \pmod{10}$ untuk setiap k dan i bilangan asli.

Karena 9^k ganjil untuk k asli maka $9^{9^{9^9}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 9^1 yaitu 9.

∴ Maka di antara $5^{5^{5^5}}$, $6^{6^{6^6}}$, 8^{8^8} , $9^{9^{9^9}}$ dan $10^{10^{10^{10}}}$ yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 adalah 8^{8^8} .

9. (Jawaban : D)

Misalkan $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = k$

Maka : $y = k(x-z)$ (1)

$x+y = kz$ (2)

$x = ky$ (3)

(1) + (2) + (3) $\rightarrow 2(x+y) = k(x+y) \rightarrow k = 2$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2005

Karena $\frac{x}{y} = k$ maka $\frac{x}{y} = 2$

∴ nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan 2

10. (Jawaban : C)

$$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$$

Kemungkinan-kemungkinan yang memenuhi adalah :

- $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$
 $((-2)^2 - (-2) - 1) \neq 0$ maka $x = -2$ memenuhi
- $x^2 - x - 1 = 1 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$
 $x = 2$ dan $x = -1$ yang keduanya memenuhi
- $x^2 - x - 1 = -1 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ atau $x = 1$
Jika $x = 0$ maka $x + 2 = 2$ (bilangan genap). Maka $x = 0$ memenuhi
Jika $x = 1$ maka $x + 2 = 3$ (bilangan ganjil). Maka $x = 1$ tidak memenuhi.

Nilai-nilai x yang memenuhi adalah $-2, -1, 0$ dan 2 .

∴ Banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ ada 4.

BAGIAN KEDUA

11. $2005 = 5 \cdot 401$ dengan 401 adalah bilangan prima.

∴ Faktor prima terbesar dari 2005 adalah **401**.

12. $|x - 1| + |x - 4| = 2$

- Jika $x \leq 1$
Maka $|x - 1| = 1 - x$ dan $|x - 4| = 4 - x$
 $1 - x + 4 - x = 2 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ (memenuhi karena $x \leq 1$)
- Jika $1 < x \leq 4$
Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = 4 - x$
 $x - 1 + 4 - x = 2 \rightarrow 3 = 2$ (tidak memenuhi kesamaan)
- Jika $x > 4$
Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = x - 4$
 $x - 1 + x - 4 = 2 \rightarrow x = \frac{7}{2}$ (tidak memenuhi $x > 4$)

∴ Nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$ adalah $x = \frac{3}{2}$.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2005

13. $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$

$$\left(3\frac{a}{b} - 2\right)^2 = 0$$

$$\therefore \text{Maka } \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

14. Luas B = 2 Luas A \rightarrow B = 2A

Misalkan panjang sisi A = x dan panjang sisi B = y maka Luas B = $y^2 = 2x^2 \rightarrow y = x\sqrt{2}$

$$\text{Keliling B} = 4y \rightarrow 4x\sqrt{2} = 20 \rightarrow x = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Keliling A} = 4x = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{Keliling A} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

15. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu = $2 \times 3 \times 2 = 12$ cara

\therefore Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah **12**.

16. $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$

Sesuai dengan ketaksamaan AM-GM maka $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{1}{x^4}} = 2$

Karena $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$ dan $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$ maka ketaksamaan hanya dipenuhi jika $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2$.

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 0$$

\therefore Bilangan real x yang memenuhi persamaan adalah **x = 1 atau x = -1**

17. Misalkan bilangan tersebut adalah $n = 100a + 10b + c$

$$100a + 10b + c = 30(a + b + c)$$

$$10(7a - 2b) = 29c \rightarrow \frac{c}{7a - 2b} = \frac{10}{29}$$

Karena 10 dan 29 relatif prima maka $7a - 2b = 29k$ dan $c = 10k$.

Karena $0 \leq c \leq 9$ maka nilai k yang memenuhi $c = 0 \rightarrow 7a = 2b$

Karena 2 dan 7 relatif prima sedangkan $0 \leq a, b \leq 9$ maka nilai a dan b yang memenuhi adalah $a = 2$ dan $b = 7$.

\therefore Bilangan tiga angka yang memenuhi adalah **270**.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2005

18. $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = (\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ)(\sin^4 75^\circ - \cos^4 75^\circ)$
 $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = ((\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)^2 - 2(\sin^2 75^\circ)(\cos^2 75^\circ))(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)(\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ)$
Meningat bahwa $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ maka :

$$\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = (1 - \frac{1}{2} \sin^2 150^\circ)(-\cos 120^\circ)$$
$$\therefore \sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = \frac{7}{16}$$

19. Jika segiempat adalah trapesium sebarang maka belum dapat dipastikan bangun tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat sebab ada kemungkinan trapesium tersebut tidak memiliki sumbu simetri lipat.

\therefore Maka bangun tersebut adalah **trapesium sama kaki**.

20. $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$

$$mn - 4n - 2m = 0 \rightarrow (m - 4)(n - 2) = 8 = 2^3$$

Karena 4 dan 2 memiliki paritas yang sama maka $m - 4$ dan $n - 2$ memiliki paritas yang sama. Maka kemungkinan-kemungkinan penyelesaiannya adalah :

- $m - 4 = -2$ dan $n - 2 = -4$
 $m = 2$ dan $n = -2$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = 2$ dan $n - 2 = 4$
 $m = 6$ dan $n = 6$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = -4$ dan $n - 2 = -2$
 $m = 0$ dan $n = 0$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = 4$ dan $n - 2 = 2$
 $m = 8$ dan $n = 4$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)

\therefore Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi ada **2**.