SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2004

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   a + b = 3 dan a^2 + ab = 7, maka a(a + b) = 7 → a(3) = 7
   ∴ a = $\frac{7}{3}$

2. (Jawaban : D)
   2004 = $2^2 \cdot 501 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ dan 167 adalah bilangan prima.
   Maka banyaknya faktor positif dari 2004 termasuk 1 dan 2004 = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12
   Banyaknya faktor 2004 selain 1 dan 2004 adalah = 12 – 2 = 10
   Faktor dari 2004 selain 1 dan 2004 adalah : 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002. Banyaknya faktor ada 10
   ∴ Banyaknya faktor ada 10

3. (Jawaban : A atau C)
   $4^{k+1} \times 5^{k-1} = 4 \times 4^k \times \frac{5^k}{5} = \frac{4}{5} \times 20^k$ atau
   $4^{k+1} \times 5^{k-1} = 16 \times 4^{k-1} \times 5^{k-1} = 16 \times 20^{k-1}$
   ∴ $4^{k+1} \times 5^{k-1}$ sama dengan $\frac{4}{5} \times 20^k$ atau $16 \times 20^{k-1}$
   Catatan : Jawaban yang dkirimkan dari panitia pusat menyatakan hanya A saja yang benar. Namun dalam hitungan ternyata C juga bernilai sama.

4. (Jawaban : B)
   - A benar karena jika a|b maka a|(bc)
   - B salah karena yang benar adalah jika a|c dan b|c, maka (ab) |c^2
   - C benar
   - D benar
   - E benar sesuai dengan A

   ∴ Pernyataan yang salah adalah B

5. (Jawaban : B)
   Rata-rata % pemakaian kamar setahun = $\frac{1 \cdot 96\% + 11 \cdot 72\%}{1 + 11}$ = 74 %
   ∴ Rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah 74 %

6. (Jawaban : E)
   1 rad ≈ 57,3° → 2 rad ≈ 114,6° dan 3 rad ≈ 171,9°
   sin 114,6° = sin (180 – 114,6)° = sin 65,4°
   sin 171,9° = sin (180 – 171,9)° = sin 8,1°

Untuk $0 \le x \le 90^\circ$ berlaku bahwa sin x_1 < sin x_2 jika $x_1 < x_2$

∴ Ketidaksamaan yang benar adalah sin 3 < sin 1 < sin 2

Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan bahwa jawaban yang benar adalah B, namun bisa dibuktikan bahwa seharusnya jawaban yang benar adalah E. Jawaban soal ini juga bisa dibuktikan dengan hitungan dengan alat hitung berupa kalkulator atau komputer.

7. (Jawaban : B)

2 bola berwarna sama bisa didapat dari keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.

$P(A) = \frac{{}_6C_2 \cdot {}_6C_0}{{}_{12}C_2} + \frac{{}_6C_0 \cdot {}_6C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

∴ Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\frac{5}{11}$

8. (Jawaban : C)

Misal segitiga tersebut adalah segitiga ABC.

Luas segitiga = ½ ab sin C

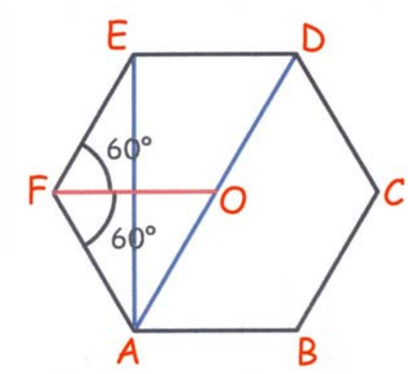
Karena a dan b bernilai konstan, maka luas segitiga akan maksimum jika sin C bernilai maksimum.

Maksimum sin C = 1 untuk C = 90° yang berarti segitiga ABC siku-siku di C.

$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

∴ Panjang sisi ketiga agar segitiga tersebut memiliki luas terbesar adalah 10.

9. (Jawaban : E)



Misal sisi segi-6 beraturan tersebut adalah a dan O adalah pusat segi-6 beraturan.

Karena bangun adalah segi-6 beraturan maka berlaku :

OA = OB = OC = OD = OE = OF = AB = BC = CD = DE = EF = AF = a

$\angle AFO = \angle OFE = 60^\circ$

$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2 - 2(AF)(FE) \cos 120^\circ$

$(AE)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot (-\frac{1}{2}) \rightarrow (AE) = a\sqrt{3}$

(AD) = (AO) + (OD) = a + a = 2a

$(AE) : (AD) = \sqrt{3} : 2$

∴ Rasio panjang diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah $\sqrt{3} : 2$

10. (Jawaban : D)
Untuk plat angka pertama tidak boleh 0. Agar jumlah keempat angka tersebut genap, maka keempat angka tersebut harus genap atau keempatnya harus ganjil atau 2 genap dan 2 ganjil.
- Jika keempat angka tersebut genap maka banyaknya plat = 4 x 5 x 5 x 5 = 500
- Jika keempat angka tersebut ganjil maka banyaknya plat = 5 x 5 x 5 x 5 = 625
- Jika keempat angak tersebut terdiri dari 2 genap dan 2 ganjil
Misal angka genap = p dan angka ganjil = j
Banyaknya susunan angka genap dan ganjil ada $\frac{4!}{2! \cdot 2!}$ = 6, yaitu : ppjj, pjpj, pjjp, jjpp, jpjp, jppj.
Untuk susunan ppjj, pjpj, pjjp, banyaknya plat untuk masing-masing susunan = 4x5x5x5 = 500.
Untuk susunan jjpp, jpjp, jppj, banyaknya plat untuk masing-masing susunan = 5x5x5x5 = 625.

∴ Mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak = 500 + 625 + 3(500) + 3(625) = **4500**

BAGIAN KEDUA

11. $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} : \frac{z}{y} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

∴ $\frac{x}{z} = \frac{5}{6}$

12. Bagian yang terkecil = $\frac{2}{2+3+5} \cdot 2004$ = $\frac{4008}{10}$

∴ Bagian yang terkecil adalah **400,8**

13. (−3) · 4 = −12 = (−3) · 5 + 3
Maka : −12 dibagi 5 akan bersisa 3

∴ (−3) ∗ 4 = **3**

14. Misal jari-jari lingkaran dalam sama dengan r dan ketiga sisinya adalah a, b dan c, maka :
Luas segitiga = ½ r (a + b + c)
Luas segitiga = ½ r · Keliling segitiga → r = 2

∴ Jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah **2**

15. $2^o + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2^o(2^{n+1} - 1)}{2-1} = 2^{n+1} - 1$
Diinginkan $2^{n+1} - 1$ sedekat mungkin ke 2004 sedangkan 2^{10} = 1024 dan 2^{11} = 2048, maka n = 10

∴ n = **10**

16. log p + log q = log (p + q) → log (pq) = log (p + q) → pq = p + q
    p(q − 1) = q
    ∴ $p = \dfrac{q}{q-1}$

17. Misal sisi siku-siku segitiga tersebut adalah a dan b.
    Luas segitiga = $\frac{1}{2}$ ab = 5 → ab = 10
    $a^2 + b^2 = 5^2 = 25$
    $(a + b)^2 - 2ab = 25$
    $(a + b)^2 - 2 \cdot 10 = 25$ → $a + b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
    Keliling segitiga = 5 + a + b
    ∴ Keliling setiga tersebut = $5 + 3\sqrt{5}$

18. x + y + xy = 34 → (x + 1) (y + 1) = 34 + 1 = 35 = 5 · 7
    Karena x dan y bilangan asli maka persamaan hanya dipenuhi jika x + 1 = 5 dan y + 1 = 7 atau x + 1 = 7 dan y + 1 = 5. Akibatnya x = 4 dan y = 6 atau x = 6 dan y = 4
    x + y = 4 + 6 = 6 + 4 = 10
    ∴ **x + y =** 10

19. Jika dalam pertandingan ada salah satu yang menang maka nilai total kedua tim = 3.
    Jika dalam pertandingan berakhir seri maka nilai total kedua tim = 1 + 1 = 2 atau ada 1 nilai yang hilang per pertandingan yang berakhir seri.
    Banyaknya pertandingan keseluruhan = ${}_{10}C_2$ = 45 pertandingan.
    Jumlah nilai untuk seluruh tim maksimum terjadi jika tidak ada pertandingan yang berakhir seri, yaitu 3 x 45 = 135.
    Karena di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124, maka banyaknya pertandingan yang berakhir seri = 135 − 124 = 11
    ∴ Banyaknya pertandingan yang berakhir seri = 11

20. Susunan delegasi yang mungkin adalah 4 pria dan 1 wanita atau 3 pria dan 2 wanita atau 2 pria dan 3 wanita atau 1 pria dan 4 wanita atau 5 wanita .
    Banyaknya cara memilih anggota delegasi = ${}_7C_4 \cdot {}_5C_1 + {}_7C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 + {}_7C_1 \cdot {}_5C_4 + {}_7C_0 \cdot {}_5C_5$ = 35 · 5 + 35 · 10 + 21 · 10 + 7 · 5 + 1 · 1 = 175 + 350 + 210 + 35 + 1 = 771 cara.
    ∴ Banyaknya cara memilih anggota delegasi ada 771.