

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2003

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2003

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : A)

Teori : Sebuah bilangan bulat habis dibagi 9 jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.

Jumlah digit 20000002 = $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4$ (Tidak habis dibagi 9)

Jumlah digit 20011002 = $2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 = 6$ (Tidak habis dibagi 9)

Jumlah digit 20022002 = $2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 = 8$ (Tidak habis dibagi 9)

Jumlah digit 20033002 = $2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2 = 10$ (Tidak habis dibagi 9)

∴ Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 adalah **0**

2. (Jawaban : A)

Angka pertama ada 4 kemungkinan : 2, 4, 6, 8. Angka ke-2, ke-3 dan ke-4 masing-masing ada 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan empat angka yang semua digitnya genap ada : $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ bilangan.

Bilangan kelipatan 2003 yang terdiri dari 4 angka adalah : 2003, 4006, 6009, 8012. Yang semua digitnya bilangan genap hanya 4006.

∴ Banyaknya bilangan 4 angka yang semua digitnya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ada : $500 - 1 = 499$ bilangan

3. (Jawaban : B)

Misal usiaku saat ini = X dan usia ayahku saat ini = Y , maka : $X = \frac{1}{3}Y$ dan $(X - 5) = \frac{1}{4}(Y - 5)$

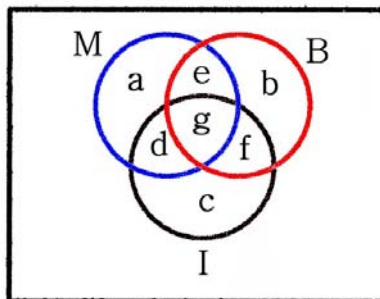
$$X - 5 = \frac{1}{4}(3X - 5)$$

$$4X - 20 = 3X - 5$$

$$X = 15$$

∴ Usiaku saat ini **15** tahun

4. (Jawaban : ?)



Misalkan M adalah himpunan siswa yang menyukai Matematika ; B adalah himpunan siswa yang menyukai Biologi dan I adalah himpunan siswa yang menyukai Bahasa Inggris.

Misalkan $n(M \cup B \cup I) = T$. Maka banyaknya siswa yang menyukai paling sedikit 1 mata pelajaran adalah T.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2003

Misalkan banyaknya siswa yang tidak menyukai satupun dari ketiga pelajaran tersebut adalah k

$$n(M \cup B \cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M \cap B) - n(M \cap I) - n(B \cap I) + n(M \cap B \cap I)$$

$$T = 40 - k = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$$

$$T = 40 - k = 40 - d - e - f \rightarrow k = d + e + f$$

Tampak ada yang kurang pada soal

Kemungkinan maksud soal :

a. $k = 0$, banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran ?

$$n(M \cup B \cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M \cap B) - n(M \cap I) - n(B \cap I) + n(M \cap B \cap I)$$

$$40 = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$$

$$d + e + g = 0$$

Karena $d \geq 0$; $e \geq 0$ dan $f \geq 0$ maka $d = 0$; $e = 0$ dan $f = 0$

$$a + d + e + g = 20 \rightarrow a = 20 - 0 - 0 - 0 = 20$$

$$c + d + f + g = 15 \rightarrow c = 15 - 0 - 0 - 0 = 15$$

$$b + e + f + g = 15 \rightarrow b = 15 - 0 - 0 - 0 = 15$$

Banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran adalah $= a + b + c = 35$

b. $n(M \cup B \cup I) = 40$ dan pertanyaan sesuai dengan soal

Maka jelas $a + b + c + d + e + f + g = 40$

(*Catatan* : Jawaban asli soal ini adalah **25**, tapi bagaimana mendapatkannya ?)

5. (Jawaban : D)

Misalkan (a) benar maka (c) dan (d) Benar

Berdasarkan (d) hal ini merupakan kontradiksi. Maka (a) salah.

Karena (a) salah maka (c) juga salah \rightarrow (d) benar dan (e) juga benar. Akibatnya (b) juga benar.

Pernyataan yang benar adalah (b) ; (d) dan (e).

\therefore Banyaknya pernyataan yang benar ada : **3**

6. (Jawaban : A)

$$xy = \frac{x}{y} \quad ; \quad y \neq 0$$

$$xy^2 = x \quad \dots\dots\dots (1)$$

a. Untuk $x = 0$

$$\frac{x}{y} = x - y \rightarrow 0 = 0 - y \rightarrow y = 0 \quad (\text{Tidak memenuhi syarat awal bahwa } y \neq 0)$$

b. Untuk $x \neq 0$

Berdasarkan pers (1) $\rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = 1$ atau $y = -1$

* Untuk $y = 1$

$$\frac{x}{y} = x - y \rightarrow x = x - 1 \rightarrow 0 = -1 \quad (\text{tidak ada nilai } x \text{ yang memenuhi})$$

* Untuk $y = -1$

$$\frac{x}{y} = x - y \rightarrow -x = x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x + y = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2003

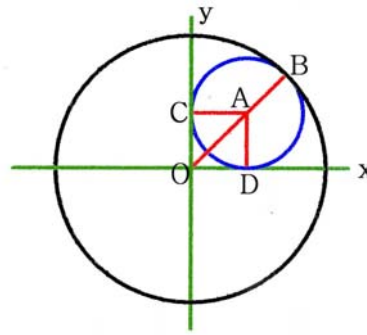
7. (Jawaban : C)

OB adalah jari-jari lingkaran besar dengan pusat C
 Misal jari-jari lingkaran dalam = r, maka AB = r
 Karena OD = OC = r maka OA = $r\sqrt{2}$

$$OB = OA + AB$$

$$1 = r\sqrt{2} + r$$

$$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$



8. (Jawaban : B)

$$3^a = 4 \rightarrow a = {}^3\log 4$$

$$5^c = 6 \rightarrow c = {}^5\log 6$$

$$7^e = 8 \rightarrow e = {}^7\log 8$$

$$4^b = 5 \rightarrow b = {}^4\log 5$$

$$6^d = 7 \rightarrow d = {}^6\log 7$$

$$8^f = 9 \rightarrow f = {}^8\log 9$$

$$abcdef = {}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \cdot {}^5\log 6 \cdot {}^6\log 7 \cdot {}^7\log 8 \cdot {}^8\log 9 = {}^3\log 9 = 2$$

$$\therefore abcdef = 2$$

9. (Jawaban : C)

N bersisa 2 jika dibagi 5 $\rightarrow N = 5m + 2 \rightarrow$ Bilangan-bilangan N adalah 2, 7, 12, 17, 22,

N bersisa 3 jika dibagi 7 $\rightarrow N = 7n + 3 \rightarrow$ Bilangan-bilangan N adalah 3, 10, 17, 24, 31,

Karena persekutuan terkecilnya 17 maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5 dan bersisa 3 jika dibagi 7 akan berbentuk $N = (5 \cdot 7)p + 17 = 35p + 17$ dengan p adalah bilangan bulat. Bilangan-bilangan N adalah 17, 52, 87, 122, 157, 192,

N bersisa 4 jika dibagi 9 $\rightarrow N = 9t + 4 \rightarrow$ Bilangan-bilangan N adalah 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, 103, 112, 121, 130, 139, 148, 157, 166,

Karena persekutuan terkecilnya adalah 157, maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7 dan bersisa 4 jika dibagi 9 akan berbentuk $N = (35 \cdot 9)k + 157$

$$N = 315k + 157$$

$$N_{\min} = 157 \text{ jika } k = 0$$

$$\therefore \text{Jumlah digit dari } N_{\min} \text{ adalah } = 1 + 5 + 7 = 13$$

10. (Jawaban : C)

$$\text{Gradien} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{m - (-9)}{7 - m}$$

$$m + 9 = 7m - m^2$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

$$(m - 3)^2 = 0$$

$$\therefore m = 3$$

BAGIAN KEDUA

11. $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$

* Untuk $x = \frac{1}{2} \rightarrow f(2) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \dots\dots\dots (1)$

* Untuk $x = -2 \rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f(2) = -4$
 $2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(2) = -8 \dots\dots\dots (2)$

Pers (1) – Pers (2)
 $2f(2) = 9$

$\therefore f(2) = \frac{9}{2}$

12. $a^2 - b^2 = 2003 \rightarrow (a + b)(a - b) = 2003 \cdot 1$

* Untuk $a + b = 2003$ dan $(a - b) = 1$
didapat $2a = 2004 \rightarrow a = 1002$ dan $2b = 2002 \rightarrow b = 1001$
 $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (1001)^2 = 2006005$

* Untuk $(a + b) = 1$ dan $(a - b) = 2003$
didapat $2a = 2004 \rightarrow a = 1002$ dan $2b = -2002 \rightarrow b = -1001$
 $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (-1001)^2 = 2006005$

$\therefore a^2 + b^2 = 2006005$

13. Alternatif 1:

- * Jika 2 orang siswa akan dibentuk 1 kelompok
Banyaknya cara ada 1
- * Jika 4 orang siswa (misal A, B, C dan D) akan dibentuk menjadi 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 1 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 1.
Karena kemungkinan pasangan A ada 3, maka banyaknya cara dari 4 orang siswa akan dibentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah $3 \times 1 = 3$ cara.
- * Jika 6 orang siswa (misal A, B, C, D, E dan F) akan dibentuk menjadi 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 3×1 .
Karena kemungkinan pasangan A ada 5, maka banyaknya cara dari 6 orang siswa akan dibentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah $5 \times 3 \times 1 = 15$ cara.

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2003

- * Jika 8 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G dan H) akan dibentuk menjadi 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada $5 \times 3 \times 1$.
Karena kemungkinan pasangan A ada 7, maka banyaknya cara dari 8 orang siswa akan dibentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah $7 \times 5 \times 3 \times 1 = 105$ cara.
- * Jika 10 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G, H, I dan J) akan dibentuk menjadi 5 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada $7 \times 5 \times 3 \times 1$.
Karena kemungkinan pasangan A ada 9, maka banyaknya cara dari 10 orang siswa akan dibentuk 5 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah $9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 945$ cara.

Alternatif 2 :

Pilih salah satu siswa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa lain adalah 9C_1 .
Pilih salah satu siswa dari 8 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah 7C_1 .
Pilih salah satu siswa dari 6 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah 5C_1 .
Pilih salah satu siswa dari 4 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah 3C_1 .
Sisanya adalah 2 orang siswa yang tidak dapat dipilih lagi.

Banyaknya cara membentuk kelima kelompok adalah ${}^9C_1 \cdot {}^7C_1 \cdot {}^5C_1 \cdot {}^3C_1 \cdot 1 = 945$.

\therefore Banyaknya cara membentuk kelima kelompok tersebut adalah **945**

14. Misal $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = k$

Dibentuk persamaan polinomial :

$$g(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k$$

$$g(x) = f(x) - k$$

Jelas bahwa $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = g(5) = 0$

Berarti bahwa 1; 2; 3; 4 dan 5 adalah akar-akar persamaan polinomial $g(x) = 0$.

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{B}{A} = -\frac{a}{1} = -a$$

Karena akar-akarnya adalah 1; 2; 3; 4 dan 5 maka :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = -a$$

$$\therefore a = -15$$

$$15. S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2002^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2003^2}\right)$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2002}\right) \left(1 + \frac{1}{2002}\right) \left(1 - \frac{1}{2003}\right) \left(1 + \frac{1}{2003}\right)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2002}{2001} \cdot \frac{2001}{2002}\right) \cdot \left(\frac{2003}{2002} \cdot \frac{2002}{2003}\right) \cdot \frac{2004}{2003}$$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2003

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2004}{2003}$$

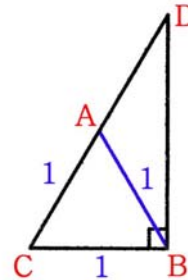
$$\therefore S = \frac{1002}{2003}$$

16. Misalkan pada hari tersebut Iwan berbohong dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata jujur. Akibatnya hari tersebut adalah Senin karena pada hari Minggu Iwan berkata jujur. Pada hari Senin Budi berkata jujur. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Minggu Budi berbohong. Hal tersebut kontradiksi karena pada hari Minggu Budi berkata jujur.

Misalkan pada hari tersebut Iwan berkata jujur dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata bohong. Akibatnya hari tersebut adalah Kamis karena Rabu Iwan berbohong. Pada hari Kamis Budi berkata bohong. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Rabu Budi berkata jujur. Hal tersebut sesuai karena pada hari Rabu Budi berkata jujur.

\therefore Percakapan tersebut terjadi pada hari **Kamis**

17. $\angle CBA = 60^\circ \rightarrow \angle ABD = 30^\circ$
 $\angle BAD = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ \rightarrow \angle ADB = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$
 $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \rightarrow \frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$
 $BD = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}$
 $\therefore BD = \sqrt{3}$



18. Karena $\sqrt{81} = 9$ dan $\sqrt{100} = 10$ maka $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 9$ dipenuhi oleh $81 \leq x < 100$
 Karena $\sqrt{144} = 12$ dan $\sqrt{169} = 13$ maka $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 12$ dipenuhi oleh $144 \leq y < 169$
 $\lfloor y - x \rfloor_{\min} = \lfloor y_{\min} - x_{\max} \rfloor = \lfloor 144 - 99,99... \rfloor = \lfloor 44,00...1 \rfloor$
 $\therefore \lfloor y - x \rfloor_{\min} = 44$

19. Nilai total = $3 \cdot (5 + 3 + 2 + 1 + 1) = 36$

Misal nilai pemenang = $x \rightarrow$ Nilai sisa = $36 - x$

Agar x minimum maka nilai sisa harus terdistribusi merata kepada 4 pelari lain. Misal nilai masing-masing pelari lain = y

$$x + 4y = 36 \text{ dengan } x > y \rightarrow 4x > 4y$$

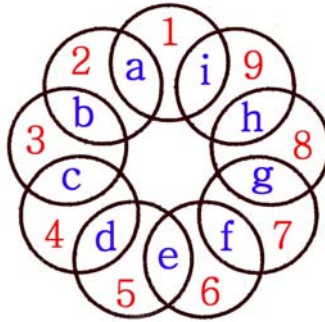
$$4x > 36 - x \rightarrow 5x > 36$$

$$x = 8 \rightarrow 4y = 28 \rightarrow y = 7$$

Kombinasi nilai 7 adalah $(5,1,1)$; $(1,5,1)$; $(3,1,3)$; $(2,3,2)$. Karena masing-masing nilai 2, 3 dan 5 tidak lebih dari tiga kali dan nilai 1 tidak lebih dari 6 kali, maka kombinasi di atas memenuhi.

\therefore Nilai minimum pemenang adalah **8**

20.



$$1 \leq a, b, c, d, e, f, g, h, i \leq 9$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ adalah bilangan bulat berbeda maka :

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Misal masing-masing lingkaran berjumlah k dan karena ada 9 lingkaran, maka :

$$(a+1+i) + (b+2+a) + (c+3+b) + (d+4+c) + (e+5+d) + (f+6+e) + (g+7+f) + (h+8+g) + (i+9+h) = 9k$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 2(a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 9k$$

$$45 + 2 \cdot 45 = 9k \rightarrow k = 15$$

$$a + 1 + i = 15 \rightarrow a + i = 14$$

Kemungkinan nilai a dan i adalah : $a = 5$ dan $i = 9$ atau $a = 9$ dan $i = 5$ atau $a = 6$ dan $i = 8$

atau $a = 8$ dan $i = 6$.

$$i + 9 + h = 15 \rightarrow i + h = 6$$

Kemungkinan nilai h dan i adalah : $h = 1$ dan $i = 5$ atau $h = 5$ dan $i = 1$ atau $h = 2$ dan $i = 4$

atau $h = 4$ dan $i = 2$.

Irisan dari kedua persamaan di atas didapat $i = 5 \rightarrow h = 1 \rightarrow a = 9$

$$b + 2 + a = 15 \rightarrow b = 15 - 2 - 9 = 4$$

$$c + 3 + b = 15 \rightarrow c = 15 - 3 - 4 = 8$$

$$d + 4 + c = 15 \rightarrow d = 15 - 4 - 8 = 3$$

$$e + 5 + d = 15 \rightarrow e = 15 - 5 - 3 = 7$$

$$f + 6 + e = 15 \rightarrow f = 15 - 6 - 7 = 2$$

$$g + 7 + f = 15 \rightarrow g = 15 - 7 - 2 = 6$$

$$\therefore a + d + g = 9 + 3 + 6 = 18$$