

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2002
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2002

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)

$$\therefore \frac{(2^4)^8}{(4^8)^2} = \frac{2^{32}}{4^{16}} = \frac{2^{32}}{2^{32}} = 1$$

2. (Jawaban : B)

Ingkaran dari : paling tidak salah satu di antara kita tidak pernah berbohong adalah :

\therefore **Kedua-duanya pernah berbohong**

3. (Jawaban : C)

$$44^{44} = 4^{44} \cdot 11^{44} = 16^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot 2^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot (2^3)^7 \cdot 2 \cdot 11^{44} = 8^{29} \cdot 2 \cdot 11^{44}$$

Karena 8 tidak membagi $(2 \cdot 11^{44})$, maka :

$$\therefore n_{\text{maks}} = 29$$

4. (Jawaban : A)

Dasar teori :

Jika $x < 0$ maka $x^2 > x$

Jika $0 < x < 1$ maka $x^2 < x$

Jika $x > 1$ maka $x^2 > x$

A. Benar

B. Salah karena jika $x^2 > 0$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 0$

C. Salah. $x^2 > x \rightarrow x(x-1) > 0$ maka $x < 0$ atau $x > 1$

D. Salah karena jika $x^2 > x$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 1$

E. Salah karena untuk $x < 0$ maka $x^2 > x$

\therefore Pernyataan yang benar adalah : **jika $x < 0$ maka $x^2 > x$**

5. (Jawaban : A)

$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 - a^{-3} = a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3 \rightarrow a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)$$

$$\therefore a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$$

6. (Jawaban : D)

Kecepatan makan untuk 1 ekor kambing, $v_k = 1$ lap. bola/ 5 hari / 5 kambing.

$$V_k = 1/5 \text{ lap bola/hari/kambing}$$

Banyaknya rumput yang dimakan, n_r dirumuskan dengan :

$$N_r = v_k \cdot n_{\text{hari}} \cdot n_{\text{kambing}}$$

$$3 = 1/5 \cdot n_{\text{hari}} \cdot 3$$

$$\therefore n_{\text{hari}} = 5 \text{ hari}$$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2002

7. (Jawaban : D)

$$(x + y) \$(x - y) = (x + y)(x - y) - (x + y) + (x - y)$$

$$\therefore (x + y) \$(x - y) = x^2 - y^2 - 2y$$

8. (Jawaban : ?)

Karena $b > 0$ maka $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ sehingga $a > 6$ (1)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{6}$$

$$ab = 6a + 6b \rightarrow a(b-6) = 6b$$

$$a = \frac{6b}{b-6} \rightarrow a = \frac{6(b-6) + 36}{b-6}$$

$$a = 6 + \frac{36}{b-6} \text{ (2)}$$

Karena $a > 6$ maka $(b-6) > 0$ (3)

Karena a bilangan bulat maka $(b-6)$ adalah faktor dari 36 dan karena $(b-6) > 0$ maka nilai $(b-6)$ yang memenuhi adalah 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 atau 36.

Untuk $b-6 = 1$	$b-6 = 2$	$b-6 = 3$	$b-6 = 4$	$b-6 = 6$
b = 7	b = 8	b = 9	b = 10	b = 12
a = 42	a = 24	a = 18	a = 15	a = 12
$b-6 = 9$	$b-6 = 12$	$b-6 = 18$	$b-6 = 36$	
b = 15	b = 18	b = 24	b = 42	
a = 10	a = 9	a = 8	a = 7	

Pasangan bilangan bulat (a,b) yang memenuhi adalah :

{ (7,42) ; (8,24) ; (9,18) ; (10,15) ; (12,12) ; (15,10) ; (18,9) ; (24,8) ; (42,7) }

\therefore Maka banyaknya pasangan (a,b) yang memenuhi adalah **9**

9. (Jawaban : C)

$$6x = x^2 + a$$

$$x^2 - 6x + a = 0$$

$$\text{Disk} = 6^2 - 4(1)(a) = 36 - 4a$$

Syarat agar $y = 6x$ memotong parabola $y = x^2 + a$ di satu titik adalah $\text{Disk} = 0$

$$36 - 4a = 0$$

$$\therefore a = 9$$

10. (Jawaban : B)

Misal bilangan selanjutnya adalah ABCD, maka $A = 2$ karena $1 + 9 + 9 + 9 \neq 27$.

$$B + C + D = 25$$

Karena diinginkan B sekecil-kecilnya, maka $(C + D)$ harus sebesar-besarnya dan karena $B \leq 9$;

$C \leq 9$ dan $D \leq 9$ maka $(C + D)_{\text{maks}} = 18$ sehingga $B_{\text{min}} = 25 - 18 = 7$.

Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 adalah 2799

\therefore Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 terjadi di antara tahun **2701 dan 2900**

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2002

11. $\angle C = 3\angle A$ dan $\angle B = 2\angle A$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \rightarrow \angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^\circ \rightarrow \angle A = 30^\circ \rightarrow \angle C = 90^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2$$

12. Misal kecepatan Bando mengecat $v_o = 1 \text{ pagar} / 3 \text{ jam} = 1/3 \text{ pagar/jam}$

Kecepatan Bandi mengecat $v_i = 1 \text{ pagar} / 4 \text{ jam} = 1/4 \text{ pagar/jam}$

t_1 adalah lamanya waktu Bando dan Bandi mengecat bersama (dalam jam)

Maka banyaknya pagar yang dicat oleh mereka n_{p1} adalah :

$$n_{p1} = v_o \cdot t_1 + v_i \cdot t_1$$

$$n_{p1} = \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{7}{12}t_1$$

t_2 adalah lamanya waktu Bando mengecat pagar sendirian setelah pertengkaran (dalam jam)

$$n_{p2} = v_o \cdot t_2$$

$$n_{p2} = \frac{1}{3}t_2$$

t_{total} adalah waktu dari 12.00 sampai 14.25 $\rightarrow t_{\text{total}} = \frac{29}{12}$ jam

Lama pertengkaran 10 menit atau $\frac{1}{6}$ jam

$$t_{\text{total}} = t_1 + \text{lama pertengkaran} + t_2$$

$$\frac{29}{12} = t_1 + \frac{1}{6} + t_2$$

$$t_1 + t_2 = \frac{9}{4} \rightarrow t_2 = \frac{9}{4} - t_1$$

$$n_{p1} + n_{p2} = 1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}t_2$$

$$1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4} - t_1\right)$$

$$12 = 7t_1 + 9 - 4t_1 \rightarrow t_1 = 1 \text{ jam}$$

Maka pertengkaran dimulai 1 jam setelah pukul 12.00

\therefore Pertengkaran dimulai pukul **13.00**

13. $N = 2^{2002} \cdot 5^{2003} = 5 \cdot (2 \cdot 5)^{2002} = 5 \cdot 10^{2002}$

$N = 500000\dots$ (Sebuah bilangan yang terdiri dari 2003 digit dengan digit pertama 5 diikuti digit 0 sebanyak 2002 kali)

\therefore Jumlah digit $N = 5 + 0 + 0 + 0 + \dots = 5$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2002

14. Misal $P = x^8 + y^8$; maka $P < 10000 \rightarrow P < 10^4$

Karena $x^8 > 0$ dan $y^8 > 0$ maka $x^8 < 10^4$ dan $y^8 < 10^4$
 $x^2 < 10$ dan $y^2 < 10$

Maka $x = 1; 2; \text{ atau } 3$ dan $y = 1; 2; \text{ atau } 3$

Untuk $x = 1$ dan $y = 1$ maka $P = 1^8 + 1^8 = 2 < 10000$ (memenuhi)

Untuk $x = 1$ dan $y = 2$ atau $x = 2$ dan $y = 1$ maka $P = 1^8 + 2^8 = 257 < 10000$ (memenuhi)

Untuk $x = 1$ dan $y = 3$ atau $x = 3$ dan $y = 1$ maka $P = 1^8 + 3^8 = 6562 < 10000$ (memenuhi)

Untuk $x = 2$ dan $y = 2$ maka $P = 2^8 + 2^8 = 512 < 10000$ (memenuhi)

Untuk $x = 2$ dan $y = 3$ atau $x = 3$ dan $y = 2$ maka $P = 2^8 + 3^8 = 6817 < 10000$ (memenuhi)

Untuk $x = 3$ dan $y = 3$ maka $P = 3^8 + 3^8 = 13122 > 10000$ (tidak memenuhi)

Maka nilai P yang memenuhi adalah 2; 257; 6562; 512; 6817

\therefore Banyaknya nilai yang berbentuk $x^8 + y^8$ dengan x, y bilangan bulat adalah **5**

15. Misal $a - b = 8$. Kemungkinan 2 nilai yang berselisih 8 adalah :

20 - 12	18 - 10	16 - 8	14 - 6	12 - 4	10 - 2
19 - 11	17 - 9	15 - 7	13 - 5	11 - 3	9 - 1

Bilangan 9; 10; 11; 12 berperan 2 baik sebagai a maupun b .

Jika kedelapan bilangan berikut :

a. 9 c. 11 e. 5 atau 13 g. 7 atau 15

b. 10 d. 12 f. 6 atau 14 h. 8 atau 16

tidak termasuk dalam n_{unsur} , maka tidak akan ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8. Maka untuk $n = 20 - 8$, masih dimungkinkan tidak ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8.

$\therefore n_{\text{minimal}} = 13$

16. Dibuat garis EF tegak lurus AB maupun CD serta melalui titik P.

Karena $\angle CPD = \angle APB$ dan AB sejajar dengan CD, maka $\triangle APB$ sebangun dengan $\triangle CPD$.

$$\frac{EP}{PF} = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3$$

$$PF = \frac{1}{3} \cdot EP \dots\dots\dots (1)$$

$$EP + PF = 4$$

$$EP + \frac{1}{3} \cdot EP = 4$$

$\therefore EP = 3$ satuan

$$17. \frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2 \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{\frac{a}{b} + 10}{1 + 10\frac{a}{b}} = 2$$

Misal $\frac{a}{b} = x$, maka $\frac{x+10}{1+10x} = 2 - x \rightarrow x + 10 = 2 - 10x^2 + 19x$

Olimpiade Matematika Tk Kabupaten/Kota 2002

$$5x^2 - 9x - 4 = 0 \rightarrow (5x - 4)(x + 1) = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5} \text{ atau } x = -1$$

∴ Karena $a \neq b$, maka $x \neq -1$ maka $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

18. $1 < p < 100$

Dari pernyataan selanjutnya, maka :

$p = 1 + 5x$ dengan x adalah bilangan bulat.

$$1 < 1 + 5x < 100 \rightarrow 0 < 5x < 99$$

$$0 < x < 20 \dots\dots\dots (1)$$

$p = 6y - 1$ dengan y adalah bilangan bulat.

$$1 < 6y - 1 < 100 \rightarrow 2 < 6y < 101$$

$$0 < y < 17 \dots\dots\dots (2)$$

$$1 + 5x = 6y - 1$$

$$5x = 2(3y - 1) \dots\dots\dots (3)$$

$3y - 1 = 5t$ dan $x = 2t$ dengan t adalah bilangan bulat

$$t = \frac{3y - 1}{5} \dots\dots\dots (4)$$

Karena t adalah bilangan bulat, maka 5 membagi $(3y - 1)$ sehingga $(3y - 1)$ adalah bilangan dengan angka satuan 0 atau 5. Maka y harus suatu bilangan dengan angka satuan 2 atau 7.

Karena $0 < y < 17$, maka $y = 2$ atau 7 atau 12 .

Jika $y = 2$ maka $p = 6(2) - 1 = 11$ (bilangan prima)

Jika $y = 7$ maka $p = 6(7) - 1 = 41$ (bilangan prima)

Jika $y = 12$ maka $p = 6(12) - 1 = 71$ (bilangan prima)

∴ Maka jumlah seluruh bilangan prima = $11 + 41 + 71 = 123$

$$19. a - b = \frac{1^2}{1} + \left(\frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3} \right) + \left(\frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5} \right) + \left(\frac{4^2}{7} - \frac{3^2}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1001^2}{2001} - \frac{1000^2}{2001} \right) - \frac{1001^2}{2003}$$

Mengingat $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, maka persamaan di atas menjadi :

$$a - b = 1 + (1) + (1) + (1) + \dots + (1) - \frac{1001^2}{2003}$$

$$a - b = 1001 \cdot 1 - \frac{1001^2}{2003}$$

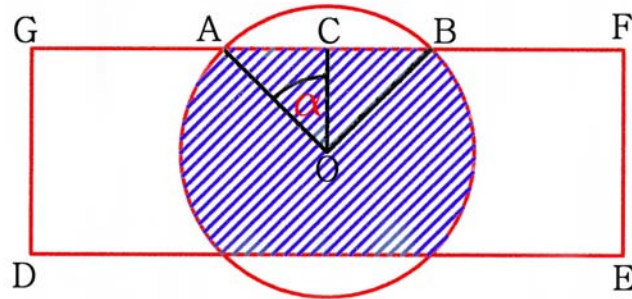
$$a - b = \frac{1001 \cdot (2003 - 1001)}{2003}$$

$$a - b = \frac{1001 \cdot 1002}{2003}$$

$$a - b \approx \frac{1002}{2} \text{ dengan mengingat } 2003 \approx 2 \cdot 1001$$

$$\therefore a - b \approx 501$$

20.



Dari soal diketahui bahwa $DE = 8$ dan $EF = 2\sqrt{2}$

$$OA = OB = 2$$

$$OC = \frac{1}{2} \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ \rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

$$\text{Luas juring OAB} = \frac{90^\circ}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi (2^2) = \pi$$

$$\text{Luas } \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 90^\circ = 2$$

$$\text{Luas tembereng AB} = \text{Luas juring OAB} - \text{Luas } \triangle OAB = \pi - 2$$

$$\text{Luas arsir} = \text{Luas lingkaran} - 2 \cdot \text{Luas tembereng AB}$$

$$\text{Luas arsir} = \pi (r)^2 - 2 \cdot (\pi - 2)$$

$$\text{Luas arsir} = 4\pi - 2\pi + 4$$

$$\therefore \text{Luas arsir} = 2\pi + 4$$