SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2014

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2015

Waktu : 210 Menit

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2014

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2014
MATEMATIKA SMA/MA

Petunjuk untuk peserta :

1. Tes terdiri dari dua bagian. Tes bagian pertama terdiri dari 20 soal isian singkat dan tes bagian kedua terdiri dari 5 soal uraian.

2. Waktu yang disediakan untuk menyelesaikan semua soal adalah 210 menit.

3. Tuliskan nama, kelas dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada setiap halaman.

4. Untuk soal bagian pertama :
   (a) Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka.
   (b) Beberapa pertanyaan dapat memiliki lebih dari satu jawaban yang benar. Anda diminta memberikan jawaban yang paling tepat atau persis untuk pertanyaan seperti ini. Nilai hanya akan diberikan kepada pemberi jawaban paling tepat atau paling persis.
   (c) Tuliskan hanya jawaban dari soal yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada kotak di sebelah kanan setiap soal.

5. Untuk soal bagian kedua :
   (a) Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka
   (b) Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.
   (c) Jika halaman muka tidak cukup, gunakan halaman sebaliknya.

6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil.

7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan dan alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan bekerja sama.

8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.

9. Selamat bekerja.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2014
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN PERTAMA

1. Jika $y = f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi persamaan $\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$, maka daerah hasil dari fungsi tersebut adalah ······

2. Jika $n \geq 1$ adalah bilangan asli, maka kelipatan persekutuan terkecil dari $3^n - 3$ dan $9^n + 9$ adalah ·····
..

3. Diberikan persegi ABCD, titik P di dalam persegi sehingga AP = 3, BP = 7 dan DP = 5. Luas persegi ABCD adalah ······

4. Bilangan segitiga ke-n adalah jumlah dari n bilangan asli pertama. Didefinisikan T_n adalah jumlah n bilangan segitiga pertama. Jika $T_n + xT_{n-1} + yT_{n-1} = n$ dimana x dan y adalah bilangan bulat, maka $x - y =$ ·······

5. Lingkaran ω_1 dan ω_2 bersinggungan di titik A dan mempunyai garis singgung sekutu l yang menyinggung ω_1, ω_2 berturut-turut di B, C. Jika BD merupakan diameter lingkaran ω_1 dengan panjang 2, dan BC = 3, luas segitiga BDC adalah ….

6. Untuk sebarang bilangan real x, didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Jumlah 2014 digit terakhir dari
$$\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$$
adalah ······

7. Untuk persiapan OSP, seorang guru mengadakan pembinaan kepada para siswa selama satu minggu. Setiap hari, pada minggu pembinaan tersebut, setiap siswa mengirimkan 5 email kepada siswa lain atau guru. Pada acara penutupan, setengah dari siswa mendapat 6 email sepertiga siswa mendapat 4 email dan sisanya masing-masing satu email. Sang guru mendapat 2014 email. Jika guru tersebut diperbolehkan mengambil cuti pada pekan pembinaan, maka banyaknya cuti yang digunakan adalah ······ hari.
(Catatan : Saat guru mengambil cuti, siswa tetap belajar dikelas secara mandiri dan hanya mengirim email kepada sesama siswa)

8. Jumlah dari semua bilangan bulat x sehingga $^2\log(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah ···

9. Jika akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ berada dalam interval [0,1] maka nilai maksimum dari

$$\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)}$$

adalah ······

10. Semua $n \leq 1000$ sedemikian sehingga bilangan
$$9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots9}_{n\ angka}$$
pada digit-digitnya terdapat tepat n buah angka 1 adalah ·····

11. Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi satu satuan. Misalkan, lingkaran Γ dengan AD sebagai diameter, dan pilih titik E pada sisi AB sehingga garis CE menjadi garis singgung pada Γ. Luas segitiga BCE adalah ······

12. Suatu sekolah mempunyai empat kelompok belajar kelas 11. Masing-masing kelompok belajar mengirimkan dua siswa untuk suatu pertemuan. Mereka akan duduk melingkar dengan tidak ada dua siswa dari satu kelompok belajar yang duduk berdekatan. Banyaknya cara adalah ···· (Dua cara mereka duduk melingkar dianggap sama jika salah satu cara dapat diperoleh dari cara yang lain dengan suatu rotasi).

13. Dono memiliki enam kartu. Setiap kartunya ditulis satu bilangan bulat positif. Untuk setiap putaran, Dono mengambil 3 kartu secara acak dan menjumlahkan ketiga bilangan yang ada pada kartu-kartu tersebut. Setelah melakukan 20 kemungkinan dalam memilih 3 dari 6 kartu, Dono mendapatkan angka 16 sebanyak 10 kali dan angka 18 sebanyak 10 kali. Bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah ······

14. Untuk bilangan real t dan bilangan real positif a dan b berlaku
$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0$$
Nilai t adalah ·····

15. Misalkan $S(n)$ menyatakan hasil penjumlahan digit-digit dari n. Sebagai contoh S(567) = 5 + 6 + 7 = 18. Banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 1000 sehingga $\frac{S(n)}{S(n+1)}$ merupakan bilangan bulat adalah ·····

16. Diberikan segitiga ABC, dengan sisi-sisi : $AB = c, BC = a, CA = b = \frac{1}{2}(a + c)$. Ukuran terbesar dari $\angle ABC$ adalah ·····

17. Di dalam segitiga ABC, digambar titik X, Y, Z dengan aturan $\angle XBC = \angle ZBA = \frac{\angle ABC}{3}$, $\angle XCB = \angle YCA = \frac{\angle BCA}{3}$, $\angle ZAB = \angle YAC = \frac{\angle BAC}{3}$. Besar sudut XYZ adalah ····

18. Misalkan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. Banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) sehingga $\tan \alpha = \frac{1}{a}$, $\tan \beta = \frac{1}{b}$, dan $\tan \gamma = \frac{1}{c}$ adalah ·········

19. Semua *tripel* bilangan ganjil berurutan (a, b, c) dengan $a < b < c$ sedemikian sehingga $a^2 + b^2 + c^2$ merupakan bilangan dengan 4 digit (angka) yang semua digitnya sama adalah ·······

20. Diketahui suatu partikel pada koordinat Cartesius, semula terletak pada titik asal (0,0). Partikel tersebut bergerak, setiap langkah adalah satu unit searah sumbu X positif, searah sumbu X negatif, searah sumbu Y positif, atau searah sumbu Y negatif. Banyaknya cara partikel tesebut bergerak agar setelah begerak 9 langkah partikel tersebut sampai pada titik (2,3) adalah ·····

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2014
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN KEDUA

1. Untuk sebarang bilangan real positif a, b, c dengan $a + b + c = 1$, tentukan nilai
$$ab\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\right)+bc\left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3}\right)+ca\left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3}\right)+\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4+c^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$$

2. Diberikan segitiga ABC lancip dengan $AB < AC$. Lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang berlawanan terhadap B dan C berturut-turut berpusat di B_1 dan C_1. Misalkan D titik tengah dari B_1C_1. Misalkan pula E adalah titik perpotongan dari AB dan CD, serta F adalah titik perpotongan dari AC dan BD. Jika EF memotong BC di titik G, buktikan bahwa AG adalah garis bagi dari $\angle BAC$.
(*Lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang berlawanan terhadap B didefinisikan sebagai lingkaran yang menyinggung AC di segmennya serta menyinggung AB dan BC diperpanjangannya*)

3. Diketahui X adalah suatu himpunan dengan 102 anggota. Misalkan $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ adalah himpunan-himpunan bagian dari X sehingga gabungan dari setiap 50 diantaranya mempunyai lebih dari 100 anggota. Buktikan bahwa terdapat $1 \le i < j < k \le 101$ sedemikian sehingga $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_k$, dan $A_j \cap A_k$ semuanya tidak kosong.

4. Misalkan Γ adalah lingkaran luar segitiga ABC. Satu lingkaran ω menyinggung Γ di A dan menyinggung BC di N. Misalkan perpanjangan AN memotong Γ lagi di E. Misalkan AD dan AF berturut-turut adalah garis tinggi ABC dan diameter Γ, tunjukkanlah bahwa
$$AN \ x \ AE = AD \ x \ AF = AB \ x \ AC$$

5. Misalkan $\{a_n\}$ merupakan barisan bilangan bulat yang memenuhi $a_1 = 2, a_2 = 8$ dan
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$$
   a. Apakah a_{2014} prima?
   b. Tunjukkan bahwa untuk setiap m ganjil bilangan $\frac{a_m+a_{4m}}{a_{2m}+a_{3m}}$ merupakan bilangan bulat.