SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Waktu : 210 Menit

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2010

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA

Petunjuk untuk peserta :

1. Tes terdiri dari dua bagian. Tes bagian pertama terdiri dari 20 soal isian singkat dan tes bagian kedua terdiri dari 5 soal uraian.

2. Waktu yang disediakan untuk menyelesaikan semua soal adalah 210 menit.

3. Tuliskan nama, kelas dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada setiap halaman.

4. Untuk soal bagian pertama :
   (a) Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka.
   (b) Beberapa pertanyaan dapat memiliki lebih dari satu jawaban yang benar. Anda diminta memberikan jawaban yang paling tepat atau persis untuk pertanyaan seperti ini. Nilai hanya akan diberikan kepada pemberi jawaban paling tepat atau paling persis.
   (c) Tuliskan hanya jawaban dari soal yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada kotak di sebelah kanan setiap soal.

5. Untuk soal bagian kedua :
   (a) Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka
   (b) Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.
   (c) Jika halaman muka tidak cukup, gunakan halaman sebaliknya.

6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil.

7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan dan alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan bekerja sama.

8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.

9. Selamat bekerja.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN PERTAMA

1. Nilai

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^{i}\right)\right) = \dots\dots\dots$$

2. Pada segitiga ABC dimisalkan a, b, dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA, dan AB. Jika

$$\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$$

Maka nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah ……

3. Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c, dan d konstanta. Jika $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, dan $P(3) = 30$, maka nilai

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10} = \dots\dots\dots$$

4. Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya fungsi $f : S \rightarrow S$ yang memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in S$ adalah ……

5. Jika a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, maka besar sudut yang menghadapi sisi dengan panjang c adalah ……

6. Bilangan enam digit $\overline{abcdef}$ dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak ……

7. Bilangan prima p sehingga $p^2 + 73$ merupakan bilangan kubik sebanyak ……

8. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C, AC = 3, dan BC = 4. Segitiga ABD siku-siku di A, AD = 12 dan titik-titik C dan D letaknya berlawanan terhadap sisi AB. Garis sejajar AC melalui D memotong perpanjangan CB di E. Jika

$$\frac{DE}{DB} = \frac{m}{n}$$

dengan m dan n bilangan bulat positif yang relatif prima, maka m + n = ……

9. Pada suatu lingkaran terdapat 12 titik yang berbeda. Dengan menggunakan 12 titik tersebut akan dibuat 6 tali busur yang tidak berpotongan. Banyaknya cara ada sebanyak ……

10. Banyaknya anggota himpunan

$$S = \{\gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in Z\}$$

adalah ……

11. Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α dan β. Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ……

12. Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah …

13. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan dengan x. Bilangan asli n sehingga persamaan $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah ······

14. Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1, merupakan garis singgung persekutuan dari kedua lingkaran tersebut. Jika PA = AB = 4, maka luas lingkaran kecil adalah ····

15. Dua puluh tujuh sisiwa pada suatu kelas akan dibuat menjadi enam kelompok diskusi yang masing-masing terdiri dari empat atau lima siswa. Banyaknya cara adalah ·····

16. Seseorang menulis surat berantai kepada 6 orang. Penerima surat ini diperintahkan untuk mengirim surat kepada 6 orang lainnya. Semua penerima surat membaca isi surat lalu beberapa orang melaksanakan perinatah yang tertulis dalam surat, sisanya tidak melanjutkan surat berantai ini. Jika terdapat 366 orang yang tidak melanjutkan surat berantai ini, maka banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai ini adalah ······

17. Jumlah suku konstan dari $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8$ adalah ·······

18. Banyak bilangan bulat positif n < 100, sehingga persamaan

$$\frac{3xy-1}{x+y} = n$$

mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x, y) adalah ········

19. Diketahui x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$xyz = 1$$

Nilai terkecil $|x + y + z|$ adalah ·······

20. Segitiga ABC memiliki panjang sisi BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D pada AB dan titik E pada AC. Jika DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama, maka panjang minimum D adalah ······

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan segitiga ABC. Andaikan P dan P_1 titik-titik pada BC, Q pada CA, dan R pada AB, sedemikian rupa sehingga

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$$

Misalkan G titik berat segitiga ABC dan K = $AP_1 \cap RQ$. Buktikan, bahwa titik-titik P, G, dan K kolinier (terletak pada satu garis)

2. Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n, bilangan prima (tidak harus berbeda) $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k$, dan bilangan prima berbeda $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_k$ yang memenuhi

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{7 + nq_1q_2\cdots q_k}{2010}$$

Tentukan banyaknya n yang memenuhi.

3. Tentukan nilai k dan d sehingga tidak ada pasangan bilang real (x, y), yang memenuhi sistem persamaan

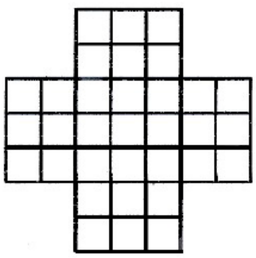
$$x^3 + y^3 = 2$$
$$y = kx + d$$

4. Diketahui n adalah bilangan asli kelipatan 2010. Tunjukan, bahwa persamaan

$$x + 2y + 3z = 2n$$

mempunyai tepat $1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12}$ pasangan solusi (x, y, z) dengan x, y, dan z merupakan bilangan bulat tak negatif.

5. Diketahui suatu papan catur seperti pada gambar. Dapatkah suatu biji catur kuda berangkat dari suatu petak melewati setiap petak yang lain hanya satu kali dan kembali ke tempat semula ? Jelaskan jawab anda !



Penjelasan : Langkah catur kuda berbentuk L, yaitu dari kotak asal :
(a) 2(dua) kotak ke kanan/kiri dan 1(satu) kotak ke depan/belakang; atau
(b) 2(dua) kotak ke depan/belakang dan 1 (satu) kotak ke kanan/kiri.