PEMBAHASAN OSK 2008

Oleh Eddy Hermato, ST

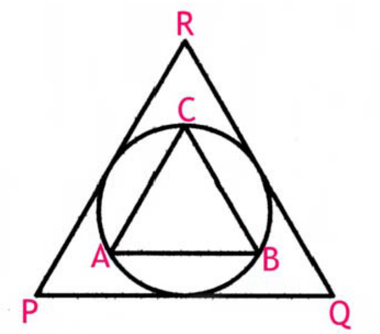
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   Akar dari suatu bilangan positif adalah juga bilangan positif, maka
   $\sqrt{a^2} = a$ jika a bilangan real positif
   $\sqrt{a^2} = -a$ jika a bilangan real negative
   $\therefore$ Karena a bilangan real maka $\sqrt{a^2}$ = $|\mathbf{a}|$

2. (Jawaban : C)
   $5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
   Banyaknya faktor positif = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16
   $\therefore$ Banyaknya faktor positif dari 5! adalah **16.**

3. (Jawaban : C)
   Agar huruf hidup tidak berdekatan maka ketiga huruf hidup tersebut harus berada pada urutan ke-1, ke-3 dan ke-5. Sisanya harus diisi oleh huruf konsonan.
   Maka banyaknya susunan = $3! \cdot 2! = 12$
   $\therefore$ Banyaknya susunan = **12.**

4. (Jawaban : C)



   Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah R, sisi ΔABC = x dan sisi ΔPQR = y.
   $\frac{x}{\sin 60^\circ}$ = 2R sehingga 3x = 3R$\sqrt{3}$
   Luas ΔPQR = ½ · R · (3y)
   ½ $y^2 \sin 60^o$ = ½ · R · 3y sehingga 3y = 6R$\sqrt{3}$
   Keliling ΔABC : Keliling ΔPQR = 3x : 3y = 1 : 2
   $\therefore$ Rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah $\frac{1}{2}$.

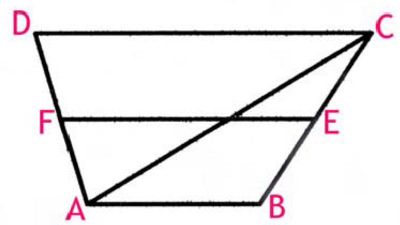
5. (Jawaban : B)
   (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2(2n + 3)
   2n + 3 adalah bilangan ganjil.
   $\therefore$ Maka nilai p terbesar adalah **2.**

6. (Jawaban : C)
$\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0 = 1$
Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1 = 3$
Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2 = 3$
Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3 = 1$
Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.
$\therefore$ Banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah **8**.

7. (Jawaban : B)
Misalkan panjang AB = AC = x maka panjang BC = $2\sqrt{x^2 - 64}$ maka
$x + \sqrt{x^2 - 64} = 16$
$x^2 - 64 = (16 - x)^2 = x^2 - 32x + 256$
$32x = 320$
$x = 10$
Panjang AC = 10
$\therefore$ Panjang AC adalah **10**.

8. (Jawaban : E)
$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
$f(-x) = \dfrac{-x+1}{-x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{f(x)}$
$\therefore$ $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

9. (Jawaban : D)



ΔABC dan ΔACD memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luas keduanya dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.
AB : DC = 1 : 3
Misalkan panjang sisi AB = x maka panjang sisi DC = 3x.
E adalah pertengahan BC dan F pertengahan DA sehingga FE sejajar AB dan DC.
Maka FE = ½ (x + 3x) = 2x
Misalkan tinggi trapesium = t.
Luas ABEF = $\dfrac{(AB + FE)}{2} \cdot \dfrac{t}{2} = \dfrac{3tx}{4}$
Luas EFDC = $\dfrac{(FE + DC)}{2} \cdot \dfrac{t}{2} = \dfrac{5tx}{4}$
Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC = 3 : 5.
$\therefore$ Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah $\dfrac{3}{5}$.

10. (Jawaban : A)

Karena $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

$\frac{b-a}{a} > \frac{d-c}{c}$ sehingga $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$

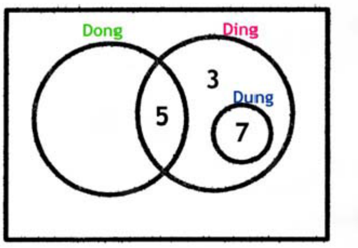
$\therefore \quad \frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$

BAGIAN KEDUA

11. Misal penonton dewasa = x dan penonton anak-anak = y maka
40.000x + 15.000y = 5.000.000
8x + 3y = 1000 .... (1)
x = 40% (x + y)
3x = 2y .... (2)
Subtitusikan persamaan (2) ke (1)
16y + 9y = 3000
y = 120
$\therefore$ Banyaknya penonton anak-anak adalah **120**

12. 2008 = 8 · 251 dan a = 251 · k dengan k dan 8 relatif prima serta k bilangan asli.
Karena k > 8 dan dua bilangan asli berurutan akan relatif prima maka k_{min} = 9.
a minimum = k_{min} · 251
a minimum = 9 · 251 = 2259.
$\therefore$ Nilai a terkecil yang mungkin adalah **2259**.

13. Kalau persoalan tersebut digambarkan dalam diagram venn maka



$\therefore$ Maka banyaknya dung adalah **7**.

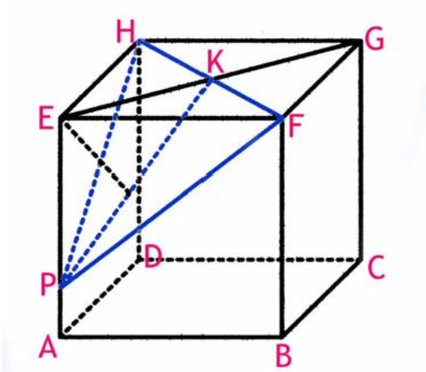
14. Pasangan bilangan yang muncul adalah 1 dan 6 atau 2 dan 5 atau 3 dan 4.
Banyaknya pasangan yang mungkin ada 6.
$\therefore$ Peluang = $\frac{6}{36}$

15. Banyaknya bilangan yang mungkin ada 4! = 24.
Masing-masing angka 1, 4, 7 dan 8 akan muncul 6 kali sebagai angka satuan.
Angka satuan bilangan tersebut = angka satuan 6· 1 + 6 · 4 + 6 · 7 + 6 · 8
$\therefore$ Angka satuan bilangan tersebut adalah **0**.

16. Misalkan koordinat A adalah (p, q) maka karena pertengahan AB adalah titik (0, 0) maka koordinat B adalah (−p, −q).
Titik A dan B terletak pada parabola maka
$q = 4 + p - p^2$ .... (1)
$-q = 4 - p - p^2$ .... (2)
Jumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat
$0 = 8 - 2p^2$ sehingga $p = \pm 2$
Jika p = 2 maka $q = 4 + 2 - 2^2 = 2$
Jika p = −2 maka $q = 4 - 2 - 2^2 = -2$
Koordinat A dan B adalah (2, 2) dan (−2, −2)
Panjang AB = $\sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2}$
∴ Panjang AB = **$4\sqrt{2}$.**

17. Karena koefisien x^3 adalah a dan konstantanya adalah 1 maka haruslah
$(ax^3 + bx^2 + 1) = (x^2 - x - 1)(ax - 1)$
$(ax^3 + bx^2 + 1) = ax^3 - (a + 1)x^2 + (1 - a)x + 1$
Maka 1 − a = 0 sehingga a = 1
b = − (a + 1) sehingga
b = −(1 + 1) = −2
∴ Nilai b yang memenuhi adalah **b = 2**.

18. Perhatikan gambar.



Perpotongan bidang yang melalui HF tersebut dengan kubus adalah segitiga PFH.
Misalkan panjang AP = x maka PE = 1 − x.
E.PFH adalah bangunan prisma dengan alas berbentuk segitiga sama kaki.
Karena PF = PH dan FE = HE maka proyeksi E pada bidang PFH akan berada pada garis tinggi PK.
Sudut antara garis EG dengan bidang PFH adalah ∠EKP.

$$EK = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Pada ΔKEP siku-siku di E.

$$\tan \angle EKP = \frac{EP}{EK} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1-x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AP = \frac{6-\sqrt{6}}{6}$$

∴ Panjang ruas AP adalah $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$.

19. Misalkan bilangan tersebut adalah N.

Misalkan N adalah bilangan n angka dengan angka-angka N adalah x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n.

$N \geq 10^{n-1}$ dan $N = 6(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 54n$

Lemma :

Akan dibuktikan bahwa jika terbukti $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$ untuk k bilangan asli ≥ 3.

Andaikan bahwa $54k < 10^{k-1}$.

Karena $k \geq 3$ maka $54 < 9 \cdot 10^{k-1}$ sehingga

$54k + 54 < 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-1}$

$54(k + 1) < 10^k$

Terbukti bahwa untuk k asli ≥ 3 maka jika $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$.

Pembuktian di atas sama saja dengan membuktikan bahwa untuk k ≥ 3 maka jika tidak ada N yang terdiri dari k angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya maka tidak akan ada juga N terdiri dari k + 1 angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya.

- Jika N terdiri dari 1 angka

  $N = x_1 = 6(x_1)$ sehingga tidak ada N asli yang memenuhi.
- Jika bilangan tersebut adalah bilangan dua angka

  $N = 10x_1 + x_2 = 6(x_1 + x_2)$

  $4x_1 = 5x_2$

  Karena x_1 dan x_2 asli maka pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi hanya (5,4).

  Bilangan yang memenuhi hanya 54.
- Jika N terdiri dari 3 angka

  Misalkan $N = 100x_1 + 10x_2 + x_3 = 6(x_1 + x_2 + x_3)$

  $94x_1 + 4x_2 = 5x_3$

  Karena $x_1 \geq 1$ maka tidak ada tripel (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi.

Sesuai dengan lemma maka untuk $n \geq 3$ maka tidak ada N yang memenuhi nilainya sama dengan 6 angka jumlah angka-angkanya.

Himpunan semua bilangan yang memenuhi hanya {54}.

$\therefore$ Himpunan semua bilangan yang memenuhi adalah **{54}**.

20. $(\sin a + \sin b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b = \frac{1}{2}$ .... (1)

$(\cos a + \cos b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{3}{2}$

$\cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b = \frac{3}{2}$ .... (2)

Jumlahkan (1) dan (2) dan dengan mengingat $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka

$2 + 2 (\sin a \sin b + \cos a \cos b) = 2$

$\sin a \sin b + \cos a \cos b = 0$

$\cos (a - b) = 0$ .... (3)

$(\sin a + \sin b)(\cos a + \cos b) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin a \cos a + \sin b \cos b + \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} (\sin 2a + \sin 2b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin (a + b) \cos (a - b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Mengingat $\cos (a - b) = 0$ maka $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore$ sin (a + b) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Catatan :
Jika yang dicari adalah nilai a dan b.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan a $\geq$ b.

Berdasarkan cos (a – b) = 0 maka
a – b = 90^o .... (4)

Karena sin (a + b) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka :

- a + b = 60^o .... (5)
  Berdasarkan (4) dan (5) maka didapat a = 75^o dan b = -15^o yang tidak memenuhi bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga.
- a + b = 120^o
  Berdasarkan (4) dan (6) maka didapat a = 115^o dan b = 15^o.
  Tetapi bila a = 115^o dan b = 15^o disubtitusikan ke persamaan sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan persamaan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ternyata tidak memenuhi keduanya.

Dapat disimpulkan bahwa tidak ada pasangan (a, b) yang memenuhi.