SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2015
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2016

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

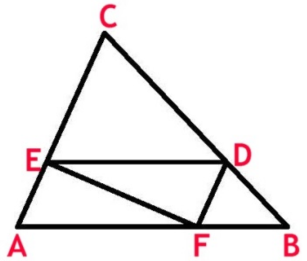
BAGIAN PERTAMA

1. $x^2 - 2x = 2 + x\sqrt{x^2 - 4x}$
   Syarat batas : $x^2 - 4x \geq 0$
   $x \leq 0$ atau $x \geq 4$
   $(x^2 - 2x - 2)^2 = x^2(x^2 - 4x)$
   $x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x = x^4 - 4x^3$
   $8x + 4 = 0$
   $x = -\frac{1}{2}$ yang memenuhi syarat batas dan setelah diuji kembali ke soal juga memenuhi.
   ∴ Jadi, jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi adalah $-\frac{1}{2}$.

2. $(n + 1) \mid (n^2 + 1) = (n + 1)(n - 1) + 2$
   Maka $(n + 1) \mid 2$
   Jadi $n + 1 = \pm 1$ atau ± 2.
   Nilai n yang memenuhi adalah $-3, -2, 0, 1$.
   ∴ Jadi, banyaknya bilangan bulat n sehingga n + 1 membagi $n^2 + 1$ adalah **4**.

3. Misalkan banyaknya pria yang hadir adalah x dan banyaknya wanita yang hadir adalah y.
   $x > y$
   ${}_xC_2 + {}_yC_2 = 7$
   Jelas bahwa $4 \leq {}_xC_2 \leq 7$
   Nilai x yang memenuhi hanya x = 4 yang dipenuhi jika y = 2.
   ∴ Jadi, banyaknya pria yang hadir dalam pesta tersebut adalah **4**.

4. Karena DE sejajar AB dan DF sejajar AC maka ΔABC, ΔEDC dan ΔFBD semuanya sebangun.
   Jelas juga bahwa dua segitiga sebangun memiliki perbandingan panjang sisi k jika dan hanya jika perbandingan luasnya adalah k^2.
   [DEC] = 4[BDF] dengan ΔDEC sebangun dengan ΔBDF.
   Maka perbandingan sisi ΔDEC dan ΔBDF adalah 2 : 1.



   Misalkan BD = x, FB = y dan DF = z maka DC = 2x, ED = 2y dan EC = 2z. Misalkan juga $\angle$BAC = α.
   ΔCED sebangun dengan ΔABC dan CD : CB = 2 : 3 maka
   AF = 2y dan AE = z
   $[AEF] = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}AB \cdot \frac{1}{3}AC \cdot \sin\alpha = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{2}{9}[ABC]$
   ∴ Jadi, perbandingan luas segitiga AEF dengan luas segitiga ABC adalah **2 : 9**.

5. $3f(x) - 2f(2 - x) = x^2 + 8x - 9$ .... (1)
   Misalkan $y = 2 - x$ didapat
   $3f(2 - y) - 2f(y) = (2 - y)^2 + 8(2 - y) - 9$ yang setara dengan
   $3f(2 - x) - 2f(x) = (2 - x)^2 + 8(2 - x) - 9$ .... (2)
   Kalikan persamaan (1) dengan 3 dan persamaan (2) dengan 2 lalu jumlahkan, didapat
   $5f(x) = 3x^2 + 24x - 27 + 2(2 - x)^2 + 16(2 - x) - 18$
   $5f(x) = 5x^2 - 5$
   $fF(x) = x^2 - 1$
   $f(2015) = 2015^2 - 1 = 4.060.224$
   ∴ Jadi, nilai f(2015) aalah **4.060.224**.

6. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2015}$
   Dengan syarat $a \neq 0$ atau $b \neq -1$.
   Persamaan di atas setara dengan
   $2015a + 2015b + 2015 = ab + a$
   $ab - 2014a - 2015b = 2015$
   $(a - 2015)(b - 2014) = 2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$
   Banyaknya faktor positif dan negatif dari 2015^2 ada 54.
   Maka banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 54.
   Tetapi (a, b) = (0, −1) termasuk salah satu dari 54 penyelesaian.
   Maka banyaknya penyelesaian (a, b) yang memenuhi = 54 − 1 = 53.
   ∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi adalah **53**.

7. Karena tidak ada keterangan jika pengantin harus berdekatan maka dapat diasumsikan bahwa pengantin tidak harus berdekatan.
   Dua laki-laki dipilih dari empat laki-laki dan dua perempuan dipilih dari empat perempuan.
   Banyaknya cara = ${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 36$.
   Susunan 3 laki-laki dan 3 perempuan yang memenuhi adalah LPLPLP dan PLPLPL yang masing-masing ada sebanyak 3!3! = 36
   Jadi, banyaknya cara menyusunnya = $36 \cdot 2 \cdot 36 = 2592$
   ∴ Jadi, banyaknya cara adalah **2592**.

8. Misalkan sudut terkecil α dan sudut terbesar 2α.
   Pada segitiga berlaku, semakin besar sudut maka akan menghadap sisi yang semakin panjang.
   Misalkan sisi terpendek $n - 1$ dan sisi terpanjang $n + 1$.
   Sesuai dalil sinus didapat
   $$\frac{n+1}{\sin 2\alpha} = \frac{n-1}{\sin \alpha}$$
   $$\cos \alpha = \frac{n+1}{2n-2}$$
   Sesuai dalil cosinus didapat
   $(n - 1)^2 = n^2 + (n + 1)^2 - 2n(n + 1) \cos \alpha$
   $(n + 1)^2 = (n + 4)(n - 1)$
   $n = 5$

$\cos\alpha = \frac{n+1}{2n-2} = \frac{3}{4}$

∴ Jadi, nilai cosinus sudut terkecil adalah $\frac{3}{4}$.

9. $f(x) = x^2 + ax + b$

$g(x) = x^2 + cx + d$

Karena f(x) dan g(x) berbeda maka $a \neq c$ atau $b \neq d$

f(20) + f(15) = g(20) + g(15)

20a + b + 15a + b = 20c + d + 15c + d

35a + 2b = 35c + 2d

Karena $a \neq c$ atau $b \neq d$ maka akan didapat $a \neq c$ dan $b \neq d$.

$\frac{d-b}{a-c} = \frac{35}{2}$

f(x) = g(x)

$x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$

$x = \frac{d-b}{a-c} = \frac{35}{2}$

Hanya ada 1 nilai x yang memenuhi.

∴ Jadi, jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi f(x) = g(x) sama dengan $\frac{35}{2}$.

10. a dan b adalah bilangan bulat positif yang memenuhi

$\frac{53}{201} < \frac{a}{b} < \frac{4}{15}$

$3\frac{3}{4} < \frac{b}{a} < 3\frac{42}{53}$

Maka jelas bahwa b = 3a + s dengan s < a. Maka

$\frac{3}{4} < \frac{s}{a} < \frac{42}{53}$

Agar b bernilai minimum maka a harus bernilai minimum.

Jelas juga bahwa a > 4

- Jika a = 5

  $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4} < s < \frac{210}{53} = 3\frac{51}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 6

  $4\frac{1}{2} = \frac{18}{4} < s < \frac{252}{53} = 4\frac{40}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 7

  $5\frac{1}{4} = \frac{21}{4} < s < \frac{294}{53} = 5\frac{29}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 8

  $6 = \frac{24}{4} < s < \frac{336}{53} = 6\frac{18}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 9

$6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} < s < \frac{378}{53} = 7\frac{7}{53}$

Bilangan bulat positif s yang memenuhi adalah s = 7.

Maka nilai b binimum adalah b = 3a + s = 3(9) + 7 = 34.

$\therefore$ Jadi, nilai terkecil b yang memenuhi adalah **34**.

11. Hubungkan komputer K_i dengan printer P_i untuk i = 1, 2, 3, ⋯, 15.

Kabel yang digunakan ada sebanyak 15.

Hubungkan 5 komputer tersisa masing-masing dengan 15 printer. Banyaknya kabel yang diperlukan ada sebanyak 5 · 15 = 75 kabel.

Maka jika ada 1 atau beberapa printer dari K_i = 1, 2, 3 ⋯, 15 diganti oleh 1 atau beberapa dari 5 printer tersisa maka akan tetap didapat 15 komputer yang terhubung masing-masing dengan 1 printer berbeda.

Jadi, total kabel yang diperlukan adalah 15 + 75 = 90.

Andaikan jumlah kabel kurang dari 90.

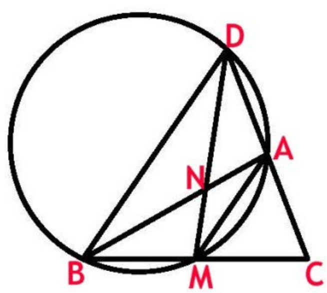
Karena 15 printer x 6 = 90 maka ada sedikitnya 1 printer yang terhubung dengan paling banyak 5 komputer. Misalkan saja printer tersebut adalah P_k.

Perhatikan sedikitnya 15 komputer lain yang tidak terhubung dengan P_k. Maka tidak mungkin banyaknya kabel kurang dari 90.

$\therefore$ Jadi, banyaknya minimal kabel yang diperlukan sebanyak **90**.

12. Misalkan $\angle BAC = \angle CMN = \alpha$. Perpanjang sisi AC sehingga memotong MN di titik D.

Maka $\angle BAD = \angle BMD = 180^o - \alpha$ dan pada bagian sisi yang sama sehingga BMAD adalah segiempat talibusur.



Karena M adalah pertengahan BC dan BN : NC = 2 : 1 maka DM dan BA adalah garis berat ΔBCD dan N adalah titik berat ΔBCD.

Karena BA adalah garis berat ΔBCD maka CA = AD.

Karena CA : CD = CM : CB maka AM sejajar DB.

Jadi BMAD adalah trapesium sama kaki.

DA = BM sehingga BC = DC = 2 AC

$\therefore$ Jadi, nilai dari $\frac{AC}{BC}$ adalah $\frac{1}{2}$.

13. $a_0 = 2$ dan $a_1 = \frac{8}{3}$

$a_m a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$

Ambil n = 1 didapat

$a_m a_1 = a_{m+1} - a_{m-1}$

$3a_{m+1} = 8a_m + 3a_{m-1}$

Maka akan didapat persamaan karakteristik $3r^2 = 8r + 3$ dengan $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ dengan r_1 dan r_2 adalah akar-akar berbeda dari persamaan karakteristik $3r^2 = 8r + 3$.

$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Jika n = 0 maka A + B = 2

Jika n = 1 maka 9A − B = 8

Didapat A = 1 dan B = 1

$a_n = 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$a_n - 3^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n > \frac{1}{2015}$

Jelas bahwa bilangan ganjil n tidak akan memenuhi.

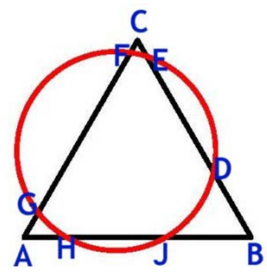
Megingat bahwa $3^6 = 729 < 2015$ dan $3^7 = 2187 > 2015$ maka nilai n yang memenuhi hanya n = 2, 4 dan 6.

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n yang memenuhi adalah **3**.

14. $\lfloor x\rfloor^2 - 3x + \lceil x\rceil = 0$
- Jika x bulat
  Maka $x = \lfloor x\rfloor = \lceil x\rceil$
  $x^2 - 2x = 0$
  Didapat x = 0 atau x = 2.
- Jika x tak bulat
  $x = \frac{\lfloor x\rfloor^2 + \lceil x\rceil}{3}$
  $x < \lfloor x\rfloor + 1$ dan $\lfloor x\rfloor < \lceil x\rceil$
  $\lfloor x\rfloor^2 = 3x - \lceil x\rceil < 3(\lfloor x\rfloor + 1) - \lfloor x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + 3$
  $(\lfloor x\rfloor - 3)(\lfloor x\rfloor + 1) < 0$
  $-1 < \lfloor x\rfloor < 3$
  - Jika $\lfloor x\rfloor = 0$
    Maka $\lceil x\rceil = 1$ didapat $x = \frac{1}{3}$ yang memenuhi persamaan.
  - Jika $\lfloor x\rfloor = 1$
    Maka $\lceil x\rceil = 2$ didapat $x = 1$ yang tidak memenuhi persamaan.
  - Jika $\lfloor x\rfloor = 2$
    Maka $\lceil x\rceil = 3$ didapat $x = \frac{7}{3}$ yang memenuhi persamaan.

∴ Jadi, bilangan real x yang memenuhi adalah **0, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{7}{3}$**.

15. AC = AG + GF + FC = 2 + 13 + 1 = 16 = AB = BC
HJ = 7

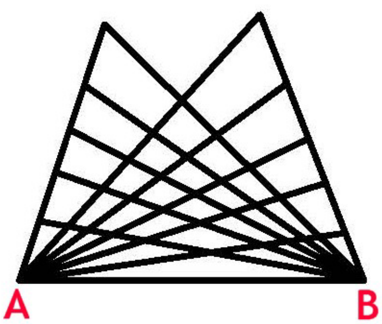


Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka
AH · AJ = AG · AF
AH (AH + 7) = 2 · (2 + 13)
(AH + 7)(AH − 3) = 0
Maka AH = 3 sehingga BJ = 16 − 7 − 3 = 6
Misalkan panjang BD = y dan DE = x sehingga CE = 16 − x − y
Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka
CF · CG = CE · CD
1 · (1 + 13) = (16 − x − y)(16 − x − y + x)
$y^2 + xy - 16x - 32y + 242 = 0$ .... (1)
Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka
BJ · BH = BD · BE
6 · (6 + 7) = (y)(y + x)
$y^2 + xy = 78$ .... (2)
Subtitusikan pers (2) ke persamaan (1) didapat
x + 2y = 20

$$\left(\frac{20-x}{2}\right)^2 + x\left(\frac{20-x}{2}\right) = 78$$

$400 - 40x + x^2 + 40x - 2x^2 = 312$
$x^2 = 88$
∴ Jadi, panjang DE adalah $\mathbf{2\sqrt{22}}$.

16. Perhatikan gambar. Titik A atau titik B akan menjadi salah satu titik sudut segitiga. Maka cukup mencari banyaknya cara memilih 2 titik yang lain.



- Jika titik A dan titik B adalah titik sudut segitiga
  Banyaknya cara memilih 1 titik lain = $_6C_1 \cdot 5 + {_5C_1} = 35$
- Jika tepat salah satu di antara A atau B adalah salah satu titik sudut.
  Banyaknya cara memilih 2 titik lain = $2({_6C_2} \cdot 5 + {_5C_2}) = 170$

Maka banyaknya segitiga = 35 + 170 = 205.
∴ Jadi, pada gambar terdapat segitiga sebanyak **205**.

17. $x \in [0,1]$

$$\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| \le 1$$

Akan diuji pada 3 titik :
- Untuk $x = 0$

$$\left|-a^2 - \frac{3}{4}\right| = 1$$
$$a = \pm\frac{1}{2}$$

- Jika $a = \frac{1}{2}$

  $$|x^2 - x - 1| = \left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right|$$

  Nilai maksimum $\frac{5}{4} \neq 1$ didapat jika $x = \frac{1}{2}$. Maka $a = \frac{1}{2}$ tidak memenuhi.
- Jika $a = -\frac{1}{2}$

  $$|x^2 + x - 1| = \left|\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right|$$

  Nilai maksimum 1 didapat jika x = 0 atau 1. Maka $a = -\frac{1}{2}$ memenuhi.

- Untuk $x = 1$

  $$\left|\frac{1}{4} - 2a - a^2\right| = 1$$

  - Jika $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = 1$

    Nilai a yang memenuhi adalah $a = \frac{5}{2}$ atau $a = -\frac{1}{2}$.

    $a = -\frac{1}{2}$ sudah dibuktikan memenuhi.

    Jika $a = \frac{5}{2}$ maka $\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| = |x^2 - 5x - 7| = \left|\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{43}{4}\right| \leq 7$

    Nilai maksimum 7 didapat ketika x = 0. Jadi, $a = \frac{5}{2}$ tidak memenuhi.
  - Jika $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = -1$

    $$a^2 - 2a - \frac{1}{4} = -1$$

    Nilai a yang memenuhi adalah $a = \frac{3}{2}$ atau $a = \frac{1}{2}$.

    $a = \frac{1}{2}$ sudah dibuktikan tidak memenuhi.

    Jika $a = \frac{3}{2}$ maka $\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| = |x^2 - 3x - 3| = \left|\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}\right| \leq 3$.

    Nilai maksimum 3 didapat ketika x = 0. Jadi, $a = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi.

- Untuk $x = -\frac{B}{2A} = a$

  $$\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| = \left|-2a^2 - \frac{3}{4}\right| = 1$$
  $$a = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

  Karena $x \in [0,1]$ maka $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

  $$\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| = \left|x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{7}{8}\right| = \left|\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right| \leq 1$$

Jadi, $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ dan $m = -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ Jadi, nilai dari M – m adalah $\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}$.

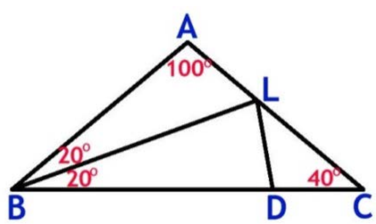
18. Karena $\frac{9n+1}{n+3}$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional maka $9n + 1 = p \cdot a^2$ dan $n + 3 = p \cdot b^2$ yang artinya $(9n + 1)(n + 3) = 9n^2 + 28n + 3$ adalah bilangan kuadrat sempurna.
    Jadi, $81n^2 + 252n + 27 = k^2$
    $(9n + 14)^2 - 169 = k^2$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif k.
    $(9n + 14 + k)(9n + 14 - k) = 169$
    - Jika $9n + 14 + k = 169$ dan $9n + 14 - k = 1$
      $9n + 14 = 85$ dan $k = 84$. Tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi.
    - Jika $9n + 14 + k = 13$ dan $9n + 14 - k = 13$
      $9n + 14 = 13$ dan $k = 0$. Tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi.
    - Jika $9n + 14 + k = -1$ dan $9n + 14 - k = -169$
      $9n + 14 = -85$ dan $k = 84$. Bilangan bulat n yang memenuhi adalah $n = -11$.
    - Jika $9n + 14 + k = -13$ dan $9n + 14 - k = -13$
      $9n + 14 = -13$ dan $k = 0$. Bilangan bulat n yang memenuhi adalah $n = -3$.
      Tetapi $n \neq -3$

    Maka semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah $n = -11$.
    ∴ Jadi, semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah **$n = -11$.**

19. Misalkan bilangan terkecil dari himpunan baik yang *baik* adalah n dan yang terbesar k.
    Jelas bahwa selisih setiap anggota himpunan bagian yang *baik* dengan bilangan terdekat dengannya yang juga anggota himpunan bagian yang *baik* sama dengan 1.
    Misalkan a adalah banyaknya bilangan bulat asli yang kurang dari n dan b adalah banyaknya bilangan asli yang lebih dari k namun kurang dari 16.
    Ada 2 kasus :
    - Jika $a + b = 10$
      Maka anggota himpunan *baik* adalah 5 bilangan bulat berurutan. Jadi, untuk setiap pasangan (a, b) yang memenuhi akan da tepat 1 himpunan bagian yang *baik*.
      Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 11.
    - Jika $0 \leq a + b \leq 9$
      Maka untuk setiap pasangan (a, b) yang memenuhi akan ada 2 jenis himpunan bagian yang *baik* yaitu $\{n, n + 1, n + 2, k - 1, k\}$ dan $\{n, n + 1, k - 2, k - 1, k\}$ dengan $k - n \geq 5$.
      Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi $= 10 + 9 + 8 + 7 + \cdots + 1 = 55$.

    Banyaknya himpunan bagian yang *baik* $= 11 + 2(55) = 121$.
    ∴ Jadi, banyaknya himpunan bagian yang baik ada sebanyak **121**.

20. Karena $\angle BAC = 100^o$ BL garis bagi maka $\angle ABL = 20^o$ dan $\angle ALB = 60^o$.



Alternatif 1 :
Sesuai dalil sinus pada ΔABC didapat

$$b = \frac{a \sin 40^o}{\sin 100^o} = \frac{a \sin 40^o}{\sin 80^o}$$

Sesuai dalil sinus pada △ABL didapat

$$AL = \frac{b \sin 20^o}{\sin 60^o}$$

Sesuai dalil sinus pada △ABL didapat

$$BL = \frac{b \sin 100^o}{\sin 60^o}$$

$$AL + BL = \frac{b(\sin 20^o + \sin 100^o)}{\sin 60^o} = \frac{a \sin 40^o\,(2 \sin 60^o \cos 40^o\,)}{\sin 60^o \cdot \cos 80^o}$$

Mengingat 2 sin 40^o cos 40^o = sin 80^o maka

AL + BL = a

Alternatif 2 :

Buat titik D pada BC sehingga BD = BL

Karena BL adalah garis bagi maka

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$

Karena ∠DBL = 20^o dan BL = BD maka ∠BDL = 80^o sehingga △CDL = 100^o.

Jadi, △CDL sebangun dengan △ABC serta DL = DC.

$$\frac{DL}{LC} = \frac{AB}{BC}$$

Maka

$$\frac{AL}{LC} = \frac{DL}{LC}$$

Didapat AL = DL = DC

AL + BL = DC + BD = BC = a

∴ Jadi, nilai AL + BL adalah **a**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2015
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2016

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   $F = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$
   $B \subseteq X$ dengan B memiliki 3 anggota
   Ada 2 pandangan terhadap F.
   - Pandangan 1, F dapat dikonstruksi
     Semua kemungkinan himpunan B ada sebanyak ${}_5C_3 = 10$, yaitu {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,4,5}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,4,5} dan {3,4,5}.
     Dengan memilih $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4\}$, $A_3 = \{3,5\}$, $A_4 = \{4,5\}$ maka apapun 3 anggota dari B akan didapat salah satunya adalah A_i dengan i = 1, 2, 3, 4.
     Akan dibuktikan bahwa m = 4 adalah minimum.
     Andaikan m < 4. Cukup dibuktikan m = 3 tidak memenuhi.
     Misalkan juga a, b, c, d, e $\in$ {1, 2, 3, 4, 5} dengan a, b, c, d, e adalah 5 bilangan asli berbeda.
     Ada 3 kasus :
     - Kasus 1, jika $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki paling banyak 3 anggota.
       Ambil 2 anggota lain sebagai anggota B maka tidak mungkin ada A_i termuat di B.
     - Kasus 2, jika $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki tepat 4 anggota.
       Tanpa mengurangi keumuman misalkan $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, d\}$.
       Banyaknya himpunan bagian dari H dengan 2 anggota ada sebanyak ${}_4C_2 = 6 > 3$.
       Misalkan K = {a, b} adalah himpunan bagian H yang berbeda dengan A_i.
       Maka untuk B = {a, b, e} tidak ada A_i termuat di B.
     - Kasus 3, jika $H = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki tepat 5 anggota.
       Tanpa mengurangi keumuman misalkan $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$ dan $A_3 = \{e, a\}$.
       Maka untuk B = {b, c, e} tidak ada A_i termuat di B.

     $\therefore$ Jadi, nilai m minimum adalah **4**.

   - Pandangan 2, F tidak dikonstruksi terlebih dulu
     Banyaknya himpunan bagian dari X dengan 2 anggota ada sebanyak ${}_5C_2 = 10$.
     Banyaknya himpunan bagian B dengan 2 anggota = ${}_3C_2 = 3$
     Maka agar memenuhi m > 10 − 3 = 7

     $\therefore$ Jadi, nilai m minimum adalah **8**.

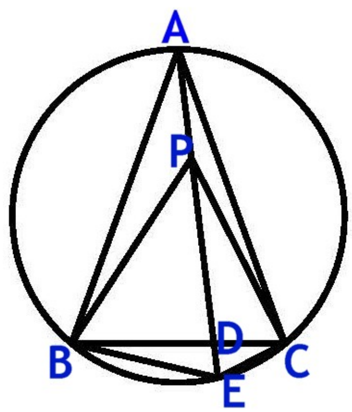
2. $(x + 1)^2 = x + y + 2$ .... (1)
   $(y + 1)^2 = y + z + 2$ .... (2)
   $(z + 1)^2 = z + x + 2$ .... (3)
   Jumlahkan ketiga persamaan didapat
   $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .... (4)
   Persamaan (1), (2) dan (3) juga setara dengan
   $x(x + 1) = y + 1$ .... (5)
   $y(y + 1) = z + 1$ .... (6)
   $z(z + 1) = x + 1$ .... (7)
   - Jika sedikitnya salah satu di antara x, y atau z sama dengan −1
     Jika x = −1 maka pada pers (5) akan didapat y = −1
     Jika y = −1 maka pada pers (6) akan didapat z = −1
     Jika z = −1 maka pada pers (7) akan didapat x = −1

Jadi, jika sedikitnya salah satu di antara x, y atau z sama dengan -1 maka yang lain akan bernilai -1.
Maka (x, y, z) = (-1, -1, -1) juga penyelesaian.

- Jika $x \neq -1$, $y \neq -1$ dan $z \neq -1$
  Kalikan persamaan (5), (6) dan (7) didapat
  $xyz(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$
  Karena $x \neq -1$, $y \neq -1$ dan $z \neq -1$ maka $xyz = 1$
  Sesuai ketaksamaan AM-GM
  $$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{(xyz)^2}$$
  Karena terjadi kesamaan maka $x^2 = y^2 = z^2 = 1$
  Maka (x, y, z) = (1, 1, 1) adalah juga penyelesaian.

∴ Jadi, semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi adalah **(-1, -1, -1)** dan **(1, 1, 1)**.

3. Misalkan $\angle BAC = \angle BPD = 2\alpha$.
Perpanjang PD hingga titik E dengan PB = PE.



Karena $\angle BPD = 2\alpha$ dan PB = PE maka $\angle PEB = 90^\circ - \alpha$.
Karena $\angle PEB = \angle ACB = 2\alpha$ serta menghadap talibusur yang sama dan pada bagian yang sama maka ABEC adalah segiempat talibusur.
$\angle BEP + \angle AEC + \angle BAC = 180^\circ$
$(90^\circ - \alpha) + \angle AEC + 2\alpha = 180^\circ$
$\angle AEC = 90^\circ - \alpha = \angle AEB$
Misalkan F adalah titik tengah BE
Karena PB = PE dan dan F adalah pertengahan BE maka $\angle PFB = 90^\circ$.
Maka ED adalah garis bagi $\angle BEC$
Karena ED adalah garis bagi ΔBEC maka
$$\frac{BE}{EC} = \frac{ED}{DC} = 2$$
Jadi, BE = 2EC
Karena F adalah pertengahan BE maka BF = EC
Karena PB = PE dan BF = EC serta $\angle PBF = \angle PEC$ maka $\Delta PBF \equiv PEC$
Maka $\angle BPF = \angle EPC = \angle DPC = \alpha$

∴ Jadi, terbukti bahwa $\angle BAC = 2\angle DPC$

4. Karena p_i untuk i = 1, 2, 3, ⋯, n membentuk barisan aritmatika dengan beda b > 0 maka $p_i = p_1 + (i - 1)b > n$ dengan $p_1 > n$.
   Misalkan q_m dengan m = 1, 2, 3, ⋯, r adalah bilangan-bilangan prima ≤ n yang memenuhi $q_i < q_j$ untuk i < j.
   Karena $p_i > n \geq q_m$ maka tidak mungkin q_m membagi p_i untuk semua nilai m dan i.
   Perhatikan q_m buah bilangan p_i untuk i = 1, 2, 3, ⋯, q_m.
   Karena p_i tidak habis dibagi q_m, kemungkinan sisa jika p_i dibagi q_m ada sebanyak $q_m - 1 \leq n - 1$.
   Karena p_i untuk i = 1, 2, ⋯, q_m ada sebanyak q_m maka sesuai Pigeon Hole Principle akan ada sedikitnya 2 di antara p_i untuk i = 1, 2, ⋯, q_m yang akan bersisa sama jika dibagi q_m. Misalkan kedua bilangan yang bersisa sama jika dibagi q_m adalah p_j dan p_k.
   $p_k - p_j = (p_1 + (k - 1)b) - (p_1 + (j - 1)b) = (k - j)b$ harus habis dibagi q_m.
   $k - j \leq q_m - 1 < q_m$
   Karena q_m adalah bilangan prima dan $q_m > k - j$ maka q_m tidak membagi $(k - j)$.
   Karena q_m membagi $p_k - p_j$ sedangkan q_m tidak membagi $k - j$ maka q_m membagi b.
   ∴ **Jadi, terbukti bahwa setiap bilangan prima p dengan p ≤ n, maka p membagi habis b.**

   Contoh barisan aritmetika p_1, p_2, ⋯, p_{10}, dengan beda positif dan p_i prima untuk i = 1, 2, ⋯, 10 :
   199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

5. $A = \{\pm a_1, \pm a_2, \cdots, \pm a_{11}\}$
   Denisikan J_X adalah jumlah anggota himpunan X.
   Misalkan B adalah himpunan yang memiliki 11 anggota bilangan asli.
   $B = \{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$
   Maka B adalah juga himpunan bagian A.
   Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari B = $2^{11} - 1 = 2047 > 2015$.
   Andaikan ada salah satu himpunan bagian dari B yang jumlah seluruh angotanya habis dibagi 2005. Maka himpunan bagian tersebut adalah S yang juga merupakan himpunan bagian dari A dan bukti selesai.
   Andaikan tidak ada salah satu himpunan bagian dari B yang jumlah seluruh angotanya habis dibagi 2005.
   Karena banyaknya himpunan bagan tak kosong dari B ada 2047 sedangkan kemungkian sisa jika dibagi 2015 ada 2015 kemungkinan maka sesuai Pigeon Hole Principle, sedikitnya 2 himpunan bagian dari B yang memiliki anggota dengan jumlah masing-masing anggota akan bersisa sama jika dibagi 2015. Misalkan kedua himpunan ini adalah C dan D.
   Andaikan salah satu himpunan X atau D adalah himpunan bagian satunya lagi. Tanpa mengurangi keumuman misalkan D adalah himpunan bagian C.
   Konstruksi himpunan baru $E = C - (C \cap D)$ yang didapat dari himpunan C dengan membuang semua anggota C yang juga anggota D.
   Karena $J_C \equiv J_D \pmod{2015}$ maka jelas $J_E \equiv 0 \pmod{2015}$ yang kontradiksi karena E adalah juga himpunan bagian dari B.
   Jadi D tidak mungkin himpunan bagian dari C dan C tidak mungkin himpunan bagian dari D.
   Konstruksi dua himpunan $P = C - (C \cap D)$ dan $Q = D - (C \cap D)$ artinya himpunan P didapat dari himpunan C dengan membuang semua anggota himpunan C yang juga merupakan anggota himpunan D dan himpunan Q didapat dari himpunan D dengan membuang semua anggota himpunan D yang juga merupakan anggota himpunan C.
   Karena anggota yang dibuang sama maka $J_P \equiv J_Q \pmod{2015}$.
   Karena D bukan himpunan bagian dari C dan C juga bukan himpunan bagian dari D maka P dan Q tidak mungkin himpunan kosong.

Jelas anggota Q adalah bilangan-bilangan asli.
Konstruksi himpunan Q" yang beranggotakan negatif dari anggota Q.
Jelas Q" adalah juga himpunan bagian A.
Karena P dan Q adalah himpunan saling lepas maka P dan Q" adalah juga himpunan saling lepas.
Maka $J_{Q"} = -J_Q$
$J_P + J_{Q"} \equiv J_Q + J_{Q"} \equiv 0 \pmod{2015}$
Maka $S = P \cup Q"$ adalah himpunan bagian A yang memenuhi $J_S \equiv 0 \pmod{2015}$
$\therefore$ **Jadi, terbukti bahwa bahwa terdapat himpunan bagian S dari A yang memenuhi.**