

**SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2014
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2015**

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $y = f(x)$

$$\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$$

Jelas bahwa $x, y \neq 0$.

Jika $\alpha > 0$ maka $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha} = 1$ sedangkan jika $\alpha < 0$ maka $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha} = -1$.

Maka $2y = 2$ jika $y = 1$ dan $x > 0$ dan $2y = -2$ jika $y = -1$ dan $x < 0$.

Jadi, nilai y yang memenuhi adalah $y = 1$ atau $y = -1$.

\therefore Jadi, daerah hasil dari fungsi $y = f(x)$ adalah $\{-1, 1\}$.

2. Misalkan $FPB(9^n + 9, 3^n - 3) = d$

$$9^n + 9 = dp \text{ dan } 3^n - 3 = dq$$

$$KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = dpq = \frac{dp \cdot dq}{d} = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{d}$$

$$d|(3^n - 3) \text{ dan } d|(9^n + 9)$$

$$\text{Maka } d|((9^n + 9) - (3^n + 3)(3^n - 3)) = 18$$

Tetapi untuk $n > 1$ didapat $3^n - 3$ tidak habis dibagi 9.

Maka untuk $n > 1$, nilai d yang mungkin memenuhi adalah 1, 2, 3 atau 6.

$9^n + 9$ dan $3^n - 3$ keduanya habis dibagi 2 dan 3. Maka keduanya habis dibagi 6.

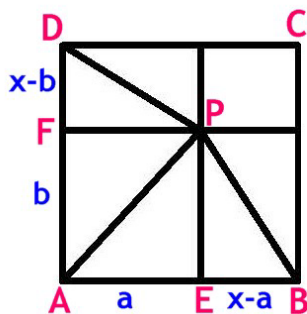
Jadi, $d = 6$.

$$\text{Jika } n = 1 \text{ maka } KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = KPK(18, 0) = 0 = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$$

$$KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$$

$$\therefore \text{ Jadi, } KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}.$$

3. Misalkan panjang sisi persegi = x . Misalkan juga proyeksi P ke AB adalah E dan ke AD adalah F dengan $AE = a$ dan $AF = b$ sehingga $EB = x - a$ dan $FD = x - b$.



$$a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 + (x - b)^2 = 25 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$b^2 + (x - a)^2 = 49 \quad \dots\dots\dots (3)$$

Pers (2) - (1) didapat

$$b = \frac{x^2 - 16}{2x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

Pers (3) – (1) didapat

$$a = \frac{x^2 - 24}{2x} \dots\dots\dots (5)$$

Misalkan $[ABCD] = x^2 = y$

$$\frac{(y - 16)^2}{4y} + \frac{(y - 40)^2}{4y} = 9$$

$$y^2 - 74y + 928 = 0 \text{ sehingga } (y - 16)(y - 58) = 0$$

Jika $x = 4$ didapat bahwa titik P akan terletak pada perpanjangan AB. Jadi, $x^2 = 58$.

∴ Jadi, luas persegi ABCD adalah 58.

4. $T_n = (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 + 3 + 6 + \dots + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$.

Barisan T_n adalah 1, 4, 10, 20, ... Akan ditentukan rumus suku ke-n dari T_n .

n	T_n	$D_1(n) = T_n - T_{n-1}$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	1			
2	4	3		
3	10	6	3	
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

Karena $D_3(n)$ konstan maka dapat diambil kesimpulan bahwa rumus T_n merupakan polinomial pangkat 3.

Misalkan $T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

n	T_n	$D_1(n) = T_n - T_{n-1}$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	$a+b+c+d$			
2	$8a+4b+2c+d$	$7a+3b+c$		
3	$27a+9b+3c+d$	$19a+5b+c$	$12a+2b$	
4	$64a+16b+4c+d$	$37a+7b+c$	$18a+2b$	$6a$
5	$125a+25b+5c+d$	$61a+9b+c$	$24a+2b$	$6a$

Dari kedua tabel didapat bahwa :

$$6a = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$12a + 2b = 3 \dots\dots\dots (2)$$

$$7a + 3b + c = 3 \dots\dots\dots (3)$$

$$a + b + c + d = 1 \dots\dots\dots (4)$$

Dari pers (1) didapat $a = \frac{1}{6}$

Dari pers (2) didapat $b = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

Dari pers (3) didapat $c = 3 - 7\left(\frac{1}{6}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18-7-9}{6} = \frac{1}{3}$

Dari pers (4) didapat $d = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6-1-3-2}{6} = 0$

Maka rumus jumlah n suku pertama, $T_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

$$\frac{T_n + xT_{n-1} + yT_{n-1}}{n(n+1)(n+2)} + \frac{x(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{y(n-2)(n-1)n}{6} = n$$

$$(n+1)(n+2) + x(n-1)(n+1) + y(n-2)(n-1) = 6$$

Berdasarkan koefisien n^2 didapat $1 + x + y = 0$

Berdasarkan koefisien n didapat $3 + 0 - 3y = 0$

Berdasarkan konstanta didapat $2 - x + 2y = 6$

Didapat $x = -2$ dan $y = 1$.

∴ Jadi, nilai $x - y$ adalah -3 .

5. Karena garis singgung persekutuan menyinggung lingkaran ω_1 di B sedangkan BD adalah diameter maka $BD \perp BC$.

$$[BCD] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$$

\therefore Jadi, luas segitiga BDC adalah 3.

6. Misalkan $X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$.

$$6^{2014} \equiv (-1)^{2014} \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$6^{2014} = 7k + 1 \text{ dengan } k \in \mathbb{N}.$$

$$X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6^{2014} \cdot 10^{2014}}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(7k+1) \cdot 10^{2014}}{7} \right\rfloor = k \cdot 10^{2014} + \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor$$

Karena $\frac{1}{7} = 0,142857$ maka 2014 angka di belakang koma dari $\frac{1}{7}$ berulang dengan kala ulang 6.

$$2014 = 335 \cdot 6 + 4$$

$$X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = k \cdot 10^{2014} + \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor \equiv \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor \pmod{10^{2014}}$$

$\left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor$ terdiri dari tepat 2014 angka.

$$\text{Jumlah 2014 digit terakhir } \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = 335 \cdot (1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + (1 + 4 + 2 + 8) = 9060.$$

\therefore Jadi, jumlah 2014 digit terakhir dari $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$ adalah **9060**.

7. Misalkan banyaknya siswa = n dan banyaknya email yang dikirim oleh guru = x .

Banyaknya email yang diterima sama dengan banyaknya email yang dikirim.

$$\frac{n}{2} \cdot 6 + \frac{n}{3} \cdot 4 + \frac{n}{6} \cdot 1 + 2014 = 5 \cdot 7 \cdot n + x \geq 35n$$

$$27n + 12084 \geq 210n \text{ sehingga } n \leq 66.$$

Karena $1980 = 66 \cdot 5 \cdot 6 < 2014 < 66 \cdot 5 \cdot 7 = 2310$ maka dibutuhkan waktu minimal 7 hari untuk menerima 2014 email.

\therefore Jadi, banyaknya cuti yang dilakukan oleh guru tersebut sama dengan **0**.

8. ${}^2\log(x^2 - 4x - 1) = m$ dengan $m \in \mathbb{Z}$.

$$(x-2)^2 - 5 = 2^m$$

$$(x-2)^2 = 5 + 2^m$$

Jika $m < 0$ maka ruas kanan merupakan pecahan. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jika $m = 0$ maka $(x-2)^2 = 6$. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jadi, $m > 0$.

Alternatif 1 :

- Jika m ganjil

Angka satuan 2^m berulang dengan periode 4. Jika m ganjil maka angka satuan 2^m adalah 2 atau 8 sehingga angka satuan $5 + 2^m$ adalah 7 atau 3 untuk m ganjil. Bilangan kuadrat tidak mungkin memiliki angka satuan 3 atau 7 sehingga tidak mungkin ada x bulat yang memenuhi.

- Jika m genap

Misalkan $m = 2n$ maka

$$(x-2)^2 - (2^n)^2 = 5$$

$$(x - 2 + 2^n)(x - 2 - 2^n) = 5$$

Karena $x - 2 + 2^n > x - 2 - 2^n$ maka ada 2 kasus

- Kasus 1, $x - 2 + 2^n = 5$ dan $x - 2 - 2^n = 1$

Maka didapat $x - 2 = 3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = 5$ dan $m = 2n = 2$

- Kasus 2, $x - 2 + 2^n = -1$ dan $x - 2 - 2^n = -5$

Maka didapat $x - 2 = -3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = -1$ dan $m = 2n = 2$

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = $5 - 1 = 4$.

∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

Alternatif 2 :

Jika $m \geq 3$ maka ruas kanan dibagi 8 akan bersisa 5. Bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1 atau 4. Jadi, tidak akan ada x bulat yang memenuhi. Maka $1 \leq m \leq 2$.

Jika $m = 1$ maka $(x - 2)^2 = 7$ sehingga tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jika $m = 2$ maka $(x - 2)^2 = 9$. Nilai x yang memenuhi adalah $x = 5$ atau $x = -1$.

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = $5 - 1 = 4$.

∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

9. Misalkan akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah p dan q dengan $p \geq q$.

$$p + q = -\frac{b}{a} \text{ dan } pq = \frac{c}{a}$$

Karena $0 \leq p, q \leq 1$ maka $(1 - p)(q - 1) \leq 0$

$p + q \leq pq + 1$ dengan tanda kesamaan terjadi ketika $p = 1$.

Karena $0 \leq p, q \leq 1$ maka $p^2 + q^2 \leq p + q$ dengan kesamaan terjadi ketika $p, q = 0$ atau 1.

$$\frac{(2a - b)(a - b)}{a(a - b + c)} = \frac{\left(2 - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{b}{a}\right)}{\left(1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)} = \frac{(2 + p + q)(1 + p + q)}{1 + p + q + pq} = \frac{p^2 + q^2 + 2pq + 3p + 3q + 2}{1 + p + q + pq}$$

$$\frac{(2a - b)(a - b)}{a(a - b + c)} = 2 + \frac{p^2 + q^2 + p + q}{1 + p + q + pq} \leq 2 + \frac{(p + q) + (pq + 1)}{1 + p + q + pq} = 3$$

Dengan tanda kesamaan terjadi ketika $p = 1$ dan $q = 0$ atau 1.

∴ Jadi, nilai maksimum dari $\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)}$ adalah 3.

10. $n \leq 1000$.

$$X = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ angka}} = (10 + 100 + 1000 + \dots + 10^n) - n = \underbrace{111 \dots 1}_{n-3 \text{ angka}} \cdot 10^4 + 1110 - n$$

Maka cukup dicari nilai n sehingga $1110 - n$ terdiri dari 3 buah angka 1. Ada 3 kasus :

- Kasus 1, jika $1110 - n = 1101$

Maka $n = 9$

- Kasus 2, jika $1110 - n = 1011$

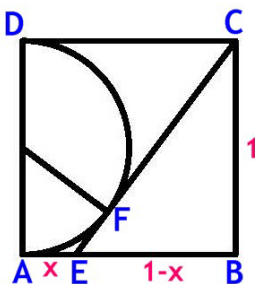
Maka $n = 99$

- Kasus 3, jika $1110 - n = 111$

Maka $n = 999$

∴ Jadi, semua $n \leq 1000$ yang memenuhi adalah 9, 99 dan 999.

11. Misalkan garis CE menyinggung lingkaran berdiameter AD di titik F dengan $AE = x$.



Karena CE menyinggung lingkaran di F maka $CF = CD = 1$ dan $EF = AE = x$.

Dengan menggunakan dalil pitagoras pada $\triangle BCE$ didapat

$$(1 + x)^2 = (1)^2 + (1 - x)^2$$

$$2x = 1 - 2x \text{ sehingga } x = \frac{1}{4}.$$

$$[BCE] = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot (1) = \frac{3}{8}$$

\therefore Jadi, luas segitiga BCE adalah $\frac{3}{8}$.

12. **Alternatif 1 :**

Beri nomor kursi dari 1 sampai 8. Anggap kursi yang ditempati siswa 1 dari kelompok 1 adalah kursi beromor 1 sebagai suatu acuan.

Ada 5 kemungkinan posisi duduk siswa 2 dari kelompok 1. Karena simetris, banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 3 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 7. Banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 4 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 6. Maka ada 3 kasus :

- Kasus 1, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 3
Banyaknya kemungkinan kelompok belajar duduk di kursi nomor 2 ada 3. Misalkan kelompok belajar yang duduk di kursi 2 adalah kelompok x.
Posisi duduk siswa 2 dari kelompok x ada 5. Karena simetris, banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 4 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 8. Banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 5 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 7. Maka ada 3 subkasus :
 - Sub kasus 1, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 4.
Maka 2 pasang siswa dari 2 kelompok lain akan duduk pada 4 kursi sejajar. Ada 2 cara memilih kelompok yang akan duduk di kursi 5. Pasangannya harus duduk di kursi 7. Sisa kursi akan diisi pasangan kelompok terakhir. Setiap pasang siswa dari kelompok belajar selain kelompok 1 dapat saling tukar posisi sehingga hitungan semula harus dikali 2^3 .
Banyaknya susunan = $2 \cdot 2^3 = 16$.
 - Sub kasus 2, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 5.
2 pasang siswa akan duduk pada 4 kursi yang terbagi dua : 1 kursi dan 3 kursi sejajar.
Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 4 ada 2. Kursi lain harus menyesuaikan.
Banyaknya susunan = $2 \cdot 2^3 = 16$.
 - Sub kasus 3, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 6.
4 kursi tersisa terbagi jadi 2 bagian, masing-masing 2 kursi. Masing-masing 2 cara memilih kelompok yang akan duduk pada kursi 4 dan 7.
Banyaknya susunan = $2 \cdot 2 \cdot 2^3 = 32$.

Banyaknya susunan = $3 \cdot (2 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 32) = 288$.

- Kasus 2, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 4
Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 2 dan 3 = $3 \cdot 2 = 6$.
Sepasang siswa dari sekolah lain akan duduk di kursi nomor 5 sampai 8. Banyak cara ada 3, yaitu duduk di kursi nomor (5,7), (5,8) atau (6,8).
Banyaknya cara pengisian dua kursi tersisa adalah $2 \cdot 1 = 2$.
Banyaknya susunan = $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 288$.
 - Kasus 3, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 5
Sepasang siswa kelompok 1 membagi 6 kursi tersisa menjadi dua bagian sama. Ada 2 kasus :
 - Sub kasus 1, ada sepasang siswa duduk di kursi 2 dan 4
Banyaknya cara memilih kelompok = 3. Banyaknya cara memilih kelompok duduk di kursi nomor 3 ada 2. Tempat duduk lain menyesuaikan.
Banyaknya cara menyusun = $3 \cdot 2 \cdot 2^3 = 48$.
 - Sub kasus 2, tidak ada sepasang siswa duduk di kursi 2 sampai 4
Banyaknya cara memilih kelompok di kursi 2 sampai 4 = $3 \cdot 2 = 6$.
Banyaknya cara memilih kelompok di kursi 6 sampai 8 = $3 \cdot 2 = 6$.
Banyaknya cara menyusun = $6 \cdot 6 \cdot 2^3 = 288$.
Banyaknya susunan = $48 + 288 = 336$.
- Maka, banyaknya seluruh susunan = $2 \cdot 288 + 2 \cdot 288 + 336 = 1488$
 \therefore Jadi, banyaknya cara adalah **1488**.

Alternatif 2 :

- Jika terdapat tepat 1 pasang siswa duduk berdekatan dari kelompok yang sama.
Akan dihitung lebih dulu banyaknya cara jika 3 pasang siswa dari 3 kelompok duduk pada 6 kursi sejajar sehingga tidak sepasang siswa duduk berdekatan dari kelompok yang sama.
Banyaknya cara memilih kelompok duduk pada kursi 1 dan 2 = $3 \cdot 2 = 6$.
Sepasang siswa dari kelompok lain akan dipilih duduk pada kursi 3 sampai 6. Ada 2 kasus :
 - Jika mereka duduk pada kursi 3 dan 5 atau 3 dan 6.
Banyaknya cara ada 2. Banyaknya susunan kelompok pada 2 kursi tersisa juga ada 2.
Banyaknya cara = $2 \cdot 2 = 4$.
 - Jika mereka duduk pada kursi 4 dan 6.
Banyaknya cara ada 1. Kursi 3 hanya ada 1 kemungkinan. Jadi, banyaknya cara ada 1.
Karena 2 siswa dari kelompok yang sama dapat bertukar maka banyak cara = $6 \cdot (4+1) \cdot 2^3 = 240$.
Banyaknya cara memilih kelompok ada 4 dan kedua siswa bisa bertukaran. Sisa 6 kursi diisi 3 pasang siswa yang tidak boleh berdekatan.
Banyaknya cara = $4 \cdot 2 \cdot 240 = 1920$.
- Jika terdapat tepat 2 pasang siswa duduk berdekatan dari kelompok yang sama
Kursi 1 dan 2 diisi dari 4 kemungkinan kelompok. Sepasang siswa lagi dipilih dari 3 kelompok.
 - Jika sepasang kelompok lagi duduk pada kursi 3 dan 4 atau 7 dan 8.
Banyaknya cara ada 2. Sisa 2 pasang siswa lagi akan duduk pada 4 kursi sejajar. Ada 2 kemungkinan kelompok yang duduk pada kursi 5. Kursi lain menyesuaikan.
Banyaknya cara = $2 \cdot 2 = 4$
 - Jika sepasang kelompok lagi duduk pada kursi 4 dan 5 atau 6 dan 7.
Banyaknya cara ada 2. Sisa 2 pasang siswa akan duduk pada 4 kursi yang terbagi dua : 1 kursi dan 3 kursi sejajar. Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 3 ada 2. Kursi lain harus menyesuaikan.
Banyaknya cara = $2 \cdot 2 = 4$.

- Jika sepasang kelompok lagi duduk pada kursi 5 dan 6.
Banyaknya cara ada 1. Sisa 4 kursi tersisa terbagi jadi 2 bagian, masing-masing 2 kursi. Masing-masing 2 cara memilih kelompok yang akan duduk pada kursi 3 dan 7.
Banyaknya cara = $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Banyaknya cara = $4 \cdot 3 \cdot (4 + 4 + 4) \cdot 2^4 = 2304$.

Tetapi hitungan di atas harus dibagi 2 sebab ada hitungan ketika sepasang siswa menjadi patokan dan ketika sepasang siswa satunya lagi yang menjadi patokan.

Jadi, banyaknya cara = 1152.

- Jika terdapat tepat 3 pasang siswa duduk berdekatan dari kelompok yang sama.
Banyaknya cara memilih kelompok yang tidak berdekatan ada 4.
Salah satu siswanya duduk di kursi nomor 1 sebagai patokan. Nomor kursi sepasang siswa yang tidak berdekatan ini harus satu ganjil dan satu genap agar tiga pasang siswa lainnya dapat duduk berdekatan. Maka siswa lainnya harus duduk di kursi nomor 4 atau 6.
Tiga pasang siswa lagi duduk pada 6 kursi. Banyaknya cara = $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
Karena siswa yang duduk di kursi jadi patokan maka hanya 3 kelompok yang siswanya dapat bertukar tempat.
Banyaknya cara = $4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2^3 = 384$.
- Jika terdapat tepat 4 pasang siswa duduk berdekatan dari kelompok yang sama
Banyaknya susunan = $(4 - 1)! \cdot 2^4 = 96$.

Banyaknya cara sehingga tidak ada siswa berdekatan = $(8 - 1)! - 1920 - 1152 - 384 - 96 = 1488$.

∴ Jadi, banyaknya cara adalah **1488**.

13. Andaikan terdapat 3 kartu dengan angka yang berbeda. Misalkan saja ketiga kartu tersebut adalah a , b dan c . Misalkan juga ketiga kartu yang lain adalah x , y dan z .

Karena jumlah setiap 3 kartu hanya menghasilkan 2 kemungkinan yaitu 16 atau 18 maka 2 di antara $x + y + a$, $x + y + b$ dan $x + y + c$ harus ada yang sama. Tetapi karena a , b dan c berbeda maka ketiga bilangan tersebut harus berbeda. Kontradiksi. Jadi, hanya ada 2 jenis angka dari 6 kartu tersebut.

Karena hanya ada 2 jenis angka, maka akan ada 3 kartu dengan jenis angka yang sama. Karena 3 membagi 18 dan 3 tidak membagi 16, maka salah satu jenis kartu tersebut adalah 6. Karena $16 = 6 + 6 + 4$ maka jenis kartu satu lagi adalah kartu dengan angka 4.

Lebih lanjut, misalkan ada 2 kartu dengan angka 4 maka $4 + 4 + 6 = 14$ haruslah salah satu penjumlahan yang muncul. Kontradiksi. Maka kartu dengan angka 4 hanya ada 1. Maka keenam kartu tersebut adalah kartu dengan angka 6, 6, 6, 6, 6 dan 4.

∴ Jadi, bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah 4.

14. a dan b adalah bilangan real positif dengan t adalah bilangan real.

$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0$$

Dari ruas kiri dan tengah didapat

$$4abt = 2b^2$$

Karena $b \neq 0$ maka $b = 2at$

Dari ruas tengah dan kanan didapat

$$2a^2 + at(2at) - (2at)^2 = 0$$

Karena $a \neq 0$ maka

$$t^2 = 1 \text{ sehingga } t = \pm 1$$

Tetapi jika $t = -1$ maka $b = -2a$ yang tidak mungkin memenuhi a dan b keduanya real positif.

∴ Jadi, nilai t adalah 1.

15. $n < 1000$.

Jika angka satuan n bukan 9 maka $S(n) < S(n+1)$. Tidak mungkin $\frac{S(n)}{S(n+1)}$ bulat. Jadi, angka satuan n harus 9.

- Kasus 1, jika angka puluhan n adalah 9.

Jelas $n = 999$ memenuhi.

Agar $\frac{k+9+9}{k+1} = 1 + \frac{17}{k+1} \in \mathbb{Z}$ maka $k+1$ membagi 17. Nilai $k < 10$ yang memenuhi hanya $k = 0$.

Jadi, bilangan yang memenuhi adalah 99.

- Kasus 2, jika angka puluhan n bukan 9.

Misalkan angka ratusan adalah k dan angka puluhan adalah m .

$$\frac{S(n)}{S(n+1)} = \frac{k+m+9}{k+m+1} = 1 + \frac{8}{k+m+1}$$

Maka $k+m+1$ membagi 8. Pasangan (k, m) yang memenuhi adalah $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$, $(0,7)$, $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$, $(6,1)$ dan $(7,0)$.

Bilangan yang memenuhi adalah 9, 19, 109, 39, 129, 219, 309, 79, 169, 259, 349, 439, 529, 619 dan 709 yang banyaknya ada 15.

\therefore Jadi, banyaknya bilangan asli $n \leq 1000$ yang memenuhi $\frac{S(n)}{S(n+1)} \in \mathbb{Z}$ adalah 17.

16. $b^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2$

$$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4a^2 + 4c^2 - (a+c)^2}{8ac} = \frac{3a^2 + 3c^2 - 2ac}{8ac}$$

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat

$$\cos \angle ABC = \frac{3a^2 + 3c^2 - 2ac}{8ac} \geq \frac{6ac - 2ac}{8ac} = \frac{1}{2}$$

Karena $\cos \angle ABC \geq \frac{1}{2}$ maka $\angle ABC \leq 60^\circ$

\therefore Jadi, ukuran terbesar $\angle ABC$ adalah 60° .

17. Berdasarkan teorema Morley akan didapat bahwa $\triangle XYZ$ adalah segitiga sama sisi.

Berikut adalah pembuktian teorema Morley.

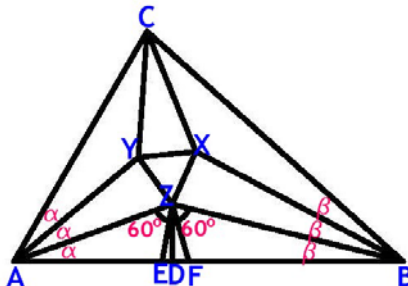
Misalkan $\angle ZAB = \angle YAZ = \angle CAY = \alpha$ dan $\angle ABZ = \angle ZBX = \angle XBC = \beta$ maka

$$\angle ACY = \angle YCX = \angle XCB = 60^\circ - \alpha - \beta$$

$$\angle AYC = 180^\circ - (\alpha) - (60^\circ - \alpha - \beta) = \beta + 120^\circ \text{ dan } \angle BXC = 180^\circ - (\beta) - (60^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + 120^\circ$$

Buat titik D, E dan F pada AB sehingga $\angle ADZ = 90^\circ$, $\angle AZE = \angle BZF = 60^\circ$.

Maka $\angle ZEF = 60^\circ + \alpha$ sedangkan $\angle ZFE = 60^\circ + \beta$ sehingga $\angle EZF = 60^\circ - \alpha - \beta$



$$\sin 3\theta = \sin (2\theta + \theta) = \sin \theta \cos 2\theta + 2 \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta (\cos 2\theta + 1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin 3\theta = 2 \sin \theta (\cos 2\theta + \cos 60^\circ) = 4 \sin \theta (\cos (\theta + 30^\circ) \cos (\theta - 30^\circ))$$

$$\sin 3\theta = 4 \sin \theta \sin (90^\circ + \theta + 30^\circ) \sin (90^\circ + \theta - 30^\circ)$$

$$\sin 3\theta = 4 \sin \theta \sin (\theta + 120^\circ) \sin (\theta + 60^\circ)$$

Pada $\triangle BCX$ berlaku $\frac{BC}{\sin \angle BXC} = \frac{CX}{\sin \angle XBC}$ sehingga $\sin(\alpha + 120^\circ) = \frac{BC \cdot \sin \beta}{CX}$

Pada $\triangle ZED$ didapat $\sin \angle ZED = \sin(\alpha + 60^\circ) = \frac{DZ}{EZ}$

Misalkan jarak C ke AB adalah h maka

$$h = AC \sin 3\alpha = 4AC \sin \alpha \sin(\alpha + 60^\circ) \sin(\alpha + 120^\circ) = \frac{4 \cdot AC \cdot BC \cdot DZ \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{CX \cdot EZ}$$

Dengan jalan lain.

Pada $\triangle ACY$ berlaku $\frac{AC}{\sin \angle AYC} = \frac{CY}{\sin \angle YAC}$ sehingga $\sin(\beta + 120^\circ) = \frac{AC \cdot \sin \alpha}{CY}$

Pada $\triangle ZED$ didapat $\sin \angle ZFD = \sin(\beta + 60^\circ) = \frac{DZ}{FZ}$

$$h = BC \sin 3\beta = 4BC \sin \beta \sin(\beta + 60^\circ) \sin(\beta + 120^\circ) = \frac{4 \cdot AC \cdot BC \cdot DZ \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{CY \cdot FZ}$$

Dari dua persamaan tersebut didapat $CX \cdot EZ = CY \cdot FZ$

$$\frac{CX}{CY} = \frac{FZ}{EZ} \text{ serta } \angle YCX = \angle EZF = 60^\circ - \alpha - \beta \text{ sehingga } \triangle CYX \cong \triangle EZF.$$

Maka $\angle CYX = \angle ZEF = 60^\circ + \alpha$

Dengan cara yang sama didapat $\angle AYZ = 60^\circ + \angle BCX = 60^\circ + (60^\circ - \alpha - \beta) = 120^\circ - \alpha - \beta$

$$\angle XYZ = 360^\circ - \angle CYX - \angle AYC - \angle AYZ = 360^\circ - (60^\circ + \alpha) - (120^\circ + \beta) - (120^\circ - \alpha - \beta) = 60^\circ.$$

\therefore Jadi, besar sudut XYZ adalah 60° .

18. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ dengan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Jelas bahwa $a, b, c > 1$.

$$\tan(\beta + \gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$\frac{b+c}{bc-1} = \frac{a-1}{a+1} \dots\dots\dots (1)$$

Karena simetri, tanpa mengurangi keumuman misalkan $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

$$3\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} \text{ sehingga } \alpha \geq \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{1}{a} = \tan \alpha \geq \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} > \frac{1}{4}$$

Maka $1 < a < 4$

- Kasus 1, jika $a = 3$

$$4(b+c) = 2(bc-1)$$

$$(b-2)(c-2) = 5$$

Pasangan bilangan bulat positif (b, c) yang memenuhi adalah $(3, 7)$.

Maka tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah $(3, 3, 7)$ dan permutasinya yang ada sebanyak 3.

- Kasus 2, jika $a = 2$

$$3(b+c) = (bc-1)$$

$$(b-3)(c-3) = 10$$

Pasangan bilangan bulat positif (b, c) yang memenuhi adalah $(4, 13)$ dan $(5, 8)$

Maka tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah $(2, 5, 8)$ dan $(2, 4, 13)$ beserta permutasinya yang masing-masing ada sebanyak 6.

Maka banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi = $2 \cdot 6 + 3 = 15$.

\therefore Jadi, banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah 15.

19. $a^2 + b^2 + c^2$ adalah bilangan ganjil dengan $a < b < c$
 Karena a, b dan c ganjil maka $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod{8}$
 Di antara 1111, 3333, 5555, 7777 dan 9999 yang bersisa 3 jika dibagi 8 hanya 5555.
 $(b - 2)^2 + (b)^2 + (b + 2)^2 = 5555$
 $3b^2 = 5555 - 8 = 5547$
 $b = \pm 43$
 \therefore Jadi, semua tripel bilangan ganjil berurutan (a, b, c) yang memenuhi adalah $(41, 43, 45)$ dan $(-45, -43, -41)$.
20. Misalkan angka 1 menyatakan langkah ke kanan, angka 2 menyatakan langkah ke atas, angka 3 menyatakan langkah ke kiri dan angka 4 menyatakan langkah ke bawah. Langkah terpendek dari $(0, 0)$ ke $(3, 2)$ hanya membutuhkan 5 langkah. Agar dibutuhkan 9 langkah maka partikel harus bergerak ke kiri 2 langkah atau ke bawah 2 langkah atau ke kiri dan ke bawah.
 Maka ada 3 kasus :
- Partikel bergerak ke kiri 2 langkah
 Karena melangkah ke kiri 2 langkah maka harus ada tambahan langkah ke kanan sebanyak 2 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111112233.
 Banyaknya susunan $= \frac{9!}{5!2!2!} = 756$.
 - Partikel bergerak ke bawah 2 langkah
 Karena melangkah ke bawah 2 langkah maka harus ada tambahan langkah ke atas sebanyak 2 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 11222244.
 Banyaknya susunan $= \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$.
 - Partikel bergerak ke kiri 1 langkah dan ke bawah 1 langkah
 Karena melangkah ke kiri 1 langkah dan ke bawah 1 langkah maka harus ada tambahan langkah ke kanan 1 langkah dan ke atas sebanyak 1 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111122234.
 Banyaknya susunan $= \frac{9!}{4!3!} = 2520$.
- Banyaknya cara partikel melangkah $= 756 + 1260 + 2520 = 4536$.
 \therefore Jadi, cara partikel melangkah adalah 4536.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2014
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2015

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA



Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Karena a, b dan c positif maka $a^3 + b^3, b^3 + c^3$ dan $c^3 + a^3$ tidak ada yang bernilai 0.

$$X = ab \left(\frac{a^2 + b^2}{a^3 + b^3} \right) + bc \left(\frac{b^2 + c^2}{b^3 + c^3} \right) + ca \left(\frac{c^2 + a^2}{c^3 + a^3} \right) + \frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4 + c^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4 + a^4}{c^3 + a^3}$$

$$X = \frac{a^4 + a^3b + ab^3 + b^4}{a^3 + b^3} + \frac{b^4 + b^3c + bc^3 + c^4}{b^3 + c^3} + \frac{c^4 + c^3a + ca^3 + a^4}{c^3 + a^3}$$

$$X = \frac{(a+b)(a^3+b^3)}{a^3+b^3} + \frac{(b+c)(b^3+c^3)}{b^3+c^3} + \frac{(c+a)(c^3+a^3)}{c^3+a^3} = (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2$$

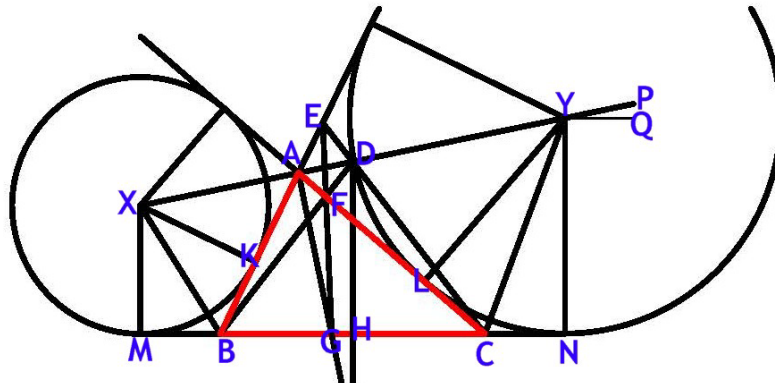
∴ Jadi, nilai dari $ab \left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} \right) + bc \left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3} \right) + ca \left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3} \right) + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$ sama dengan 2.

2. Misalkan $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$ sehingga $\angle BAC = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

Alternatif 1 :

Maka $\angle XAK = \angle YAL = \frac{\beta + \gamma}{2}$ dan $\angle KXB = \angle BXM = \frac{\beta}{2}$ sedangkan $\angle LYC = \angle CYN = \frac{\gamma}{2}$.

$$\angle PYQ = \angle AXK + \angle KXM - 90^\circ = \left(90^\circ - \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \right) + (\beta) - 90^\circ = \frac{\beta - \gamma}{2}$$



Misalkan jari-jari lingkaran berpusat di $X = R_x$ dan jari-jari lingkaran berpusat di $Y = R_y$.

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = AK + KB = R_x \left(\cot \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) + \tan \left(\frac{\beta}{2} \right) \right)$$

$$a \sin \gamma \cdot \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) = R_x \cdot \sin(\beta + \gamma) \cdot \left(\cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \right)$$

$$R_x = \frac{a \sin \gamma \cdot \cos \left(\frac{\beta}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{a \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right)}$$

Dengan cara yang sama didapat

$$R_y = \frac{a \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right)}$$

$$\frac{MB}{CN} = \frac{R_x \cdot \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)}{R_y \cdot \tan \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) \cdot \tan \left(\frac{\gamma}{2} \right)} = 1$$

Karena $MB = CN$ maka proyeksi titik tengah XY (titik D) terhadap BC (titik H) akan berada di tengah-tengah BC . Jadi, $BH = HC$.

Karena H adalah pertengahan BC maka $\triangle BDC$ adalah segitiga sama kaki.

Misalkan $\angle CBD = \angle BCD = \theta$.

$$\tan \theta = \frac{DH}{AH} = \frac{R_x + R_y}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)$$

$\angle CBD = \angle BCD = \frac{\beta + \gamma}{2}$ sehingga $\angle BDC = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Maka $ABCD$ adalah segiempat talibusur.

$\angle ADC = 180^\circ - \beta$ dan $\angle DAC = \angle CBD = \frac{\beta + \gamma}{2}$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle CBD} = \frac{\sin \beta}{\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}$$

$\angle ADE = \angle BCD - \angle PYQ = \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) - \left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) = \beta$ dan $\angle DAE = \angle BCD = \frac{\beta + \gamma}{2}$

$$\frac{EA}{DE} = \frac{\sin \angle ADE}{\sin \angle DAE} = \frac{\sin \beta}{\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}$$

Maka $\frac{AC}{CD} = \frac{EA}{DE}$

Alternatif 2 :

Karena $\angle EAY = \angle YAC$ maka AD adalah garis bagi $\triangle CAE$.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EA}{DE}$$

Alternatif 1.2.a

Karena garis BD , AC dan EG melalui 1 titik maka sesuai dalil Ceva didapat

$$\begin{aligned} \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EA}{AB} &= 1 \\ \frac{BG}{GC} &= \frac{EA}{AB} \cdot \frac{AB}{DE} = \frac{EA}{DE} \\ \frac{BG}{AB} &= \frac{EA}{AC} \end{aligned}$$

Alternatif 1.2.b :

Pada $\triangle EAF$ berlaku $\frac{EA}{\sin \angle AFE} = \frac{EF}{\sin \angle EAF}$ yang setara dengan $\frac{EA}{\sin \angle CFG} = \frac{EF}{\sin(\beta + \alpha)}$.

Pada $\triangle DEF$ berlaku $\frac{DE}{\sin \angle DFE} = \frac{EF}{\sin \angle EDF}$ yang setara dengan $\frac{DE}{\sin \angle BFG} = \frac{EF}{\sin(\beta + \alpha)}$.

Maka didapat $\frac{\sin \angle BFG}{\sin \angle CFG} = \frac{DE}{EA}$

Pada $\triangle BFG$ berlaku $\frac{BG}{\sin \angle BFG} = \frac{BF}{\sin \angle BGF} = \frac{BF}{\sin \angle CGF}$.

Pada $\triangle CFG$ berlaku $\frac{GC}{\sin \angle CFG} = \frac{CF}{\sin \angle CGF}$.

Dengan memperhatikan $\triangle ABF \cong \triangle CDF$ maka

$$\frac{BG}{GC} = \frac{BF \cdot \sin \angle BFG}{CF \cdot \sin \angle CFG} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{DE}{EA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{BG}{AB} = \frac{EA}{AC}$$

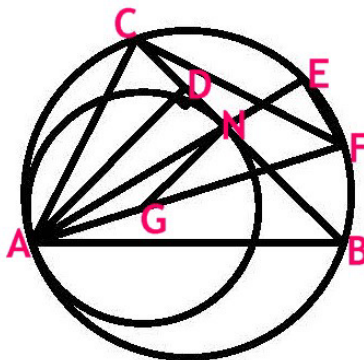
$$\frac{\sin \angle BAG}{\sin \angle AGB} = \frac{\sin \angle GAC}{\sin \angle AGC}$$

$$\sin \angle BAG = \sin \angle GAC$$

Karena $\angle BAG + \angle GAC \neq 180^\circ$ maka $\angle BAG = \angle GAC$.

\therefore Jadi, terbukti bahwa AG adalah garis bagi $\angle BAC$.

3. Karena setiap 50 himpunan bagian mempunyai lebih dari 100 anggota maka sesuai *Pigeon Hole Principle* akan ada 1 himpunan bagian dengan sedikitnya 3 anggota. Misalkan himpunan bagian ini adalah A_x . Bagi 101 himpunan bagian ke dalam 3 kelompok : Kelompok I terdiri dari 50 himpunan bagian, kelompok II terdiri dari 50 himpunan bagian dan kelompok III adalah A_x . Karena setiap 50 himpunan bagian mempunyai lebih dari 100 anggota sedangkan X hanya memiliki 102 anggota, maka paling banyak hanya 1 anggota X yang tidak menjadi anggota gabungan himpunan bagian di kelompok I dan juga paling banyak hanya 1 anggota X yang tidak menjadi anggota gabungan himpunan bagian di kelompok II. Karena A_x mempunyai sedikitnya 3 anggota maka akan ada 1 anggota A_x yang menjadi anggota salah satu himpunan bagian di kelompok I (misalkan A_y) dan juga menjadi anggota salah satu himpunan bagian di kelompok II (misalkan A_z). Maka irisan setiap dua himpunan bagian di antara A_x , A_y dan A_z tidak akan kosong.
- \therefore Jadi, terbukti bahwa terdapat $1 \leq i < j < k \leq 101$ sedemikian sehingga $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_k$, dan $A_j \cap A_k$ semuanya tidak kosong
4. Misalkan pusat lingkaran ω ada di G. Karena lingkaran ω menyinggung lingkaran Γ di A dengan AF adalah diameter lingkaran Γ maka G akan terletak pada garis AF.



Karena AF diameter maka $\angle AEF = 90^\circ$.

Misalkan $\angle GAN = x$. Karena N terletak pada lingkaran ω maka $\angle GNA = x$.

Karena lingkaran ω menyinggung BC maka $\angle GND = 90^\circ$ sehingga $\angle AND = 90^\circ - x$ dan $\angle NAD = x$.

Karena $\angle NAD = \angle FAE = x$ dan $\angle ADN = \angle AEF = 90^\circ$ maka $\triangle ADN \cong \triangle AEF$.

$$\frac{AN}{AD} = \frac{AF}{AE}$$

$$AN \times AE = AD \times AF$$

Karena AF diameter lingkaran Γ maka $\angle ACF = 90^\circ$ sedangkan $\angle ADB = 90^\circ$.

Karena menghadap talibusur yang sama maka $\angle ABD = \angle AFC$.

Jadi, $\triangle ABD \cong \triangle AFC$.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF}$$

$$AD \times AF = AB \times AC$$

\therefore Jadi, terbukti bahwa $AN \times AE = AD \times AF = AB \times AC$.

5. $a_1 = 2$ dan $a_2 = 8$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 2a_{n+1} + 5(-1)^n$$

Karena $a_2 = 8$ dan $a_2 > a_1$ maka $a_k \in N$ untuk setiap $k \in N$.

Selain itu $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n+1} - 5(-1)^n$

Karena $8 > 5(-1)^n$ maka $a_{n+2} - a_{n+1} > 0$ sehingga $a_p > a_q$ untuk semua $p > q$.

a. Jelas bahwa $5(-1)^n$ ganjil untuk semua $n \in N$.

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$$

Karena a_1 genap dan a_2 genap maka a_3 ganjil.

Karena a_2 genap dan a_3 ganjil maka a_4 genap.

Karena a_3 ganjil dan a_4 genap maka a_5 genap.

Karena a_4 genap dan a_5 genap maka a_6 ganjil.

Maka a_n akan periodik dengan kala ulang 3.

Jika $n = 3k$ maka a_n ganjil sedangkan jika $n \neq 3k$ maka a_n genap untuk semua $k \in N$.

Karena 2014 tidak habis dibagi 3 maka a_{2014} genap dan $a_{2014} > a_1 = 2$

Karena $a_{2014} > 2$ dan genap maka tidak mungkin a_{2014} prima.

$\therefore a_{2014}$ tidak prima.

b. $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$$

Persamaan karakteristiknya adalah $y^2 - 3y + 1 = 0$ yang dipenuhi oleh $y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$A \cdot (-1)^{n+2} = 3A \cdot (-1)^{n+1} - A \cdot (-1)^n + (-1)^n$$

$$A = -3A - A + 1$$

$$A = \frac{1}{5}$$

$$a_n = C \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + D \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + (-1)^n$$

Dengan mengambil $a_1 = 2$ dan $a_2 = 8$ didapat $C = 1$ dan $D = 1$ sehingga rumus suku ke- n adalah

$$a_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + (-1)^n$$

Misalkan $p^n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ dan $q^n = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$

$$a_m + a_{4m} = p^m + q^m + p^{4m}p^m + q^m + q^{4m}$$

Karena $2m$ genap dan $3m$ ganjil maka

$$a_{2m} + a_{3m} = p^{2m} + q^{2m} + p^{3m} + q^{3m}$$

$$\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}} = \frac{p^m + q^m + p^{4m} + q^{4m}}{p^{2m} + q^{2m} + p^{3m} + q^{3m}}$$

$$\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}} = p^m + q^m + \frac{p^m + q^m - p^{3m} - (pq^2)^m - (pq^3)^m - (p^2q)^m - q^{3m} - (p^3q)^m}{p^{2m} + q^{2m} + p^{3m} + q^{3m}}$$

Karena $pq = 1$ maka

$$\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}} = p^m + q^m + \frac{p^m + q^m - p^{3m} - q^m - q^{2m} - p^m - q^{3m} - p^{2m}}{p^{2m} + q^{2m} + p^{3m} + q^{3m}} = p^m + q^m - 1 = a_m \in N$$

\therefore Jadi, terbukti bahwa untuk m bilangan ganjil maka $\frac{a_m + a_{4m}}{a_{2m} + a_{3m}}$ merupakan bilangan bulat.