SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2012
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2013

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

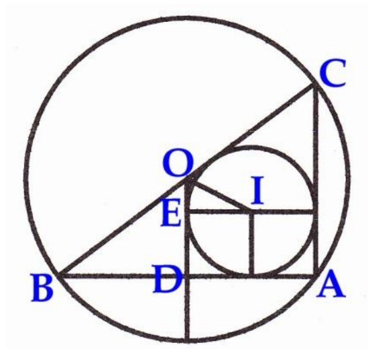
SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Tanpa mengurangi keumuman misalkan AC = 3 ; AB = 4 ; BC = 5.
   Misalkan juga R adalah jari-jari lingkaran luar dan r adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC.
   Karena ΔABC siku-siku di A maka BC adalah diameter lingkaran luar ΔABC.
   Jadi, O adalah pertengahan BC.



   Misalkan D adalah titik pada AB sehingga OD ⊥ AB dan E pada OD sehingga IE ⊥ OD.
   $\frac{1}{2}r(a+b+c) = [ABC] = 6$
   r = 1
   Karena O adalah pertengahan BC maka D adalah pertengahan AB sehingga AD = 2.
   Jadi, E adalah titik singgung garis OD terhadap lingkaran dalam. Maka IE = 2.
   OE = OD − ED = $\frac{1}{2}$ AC − r = $\frac{1}{2}$
   $OI^2 = OE^2 + IE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2$
   OI = $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
   ∴ Jadi, panjang OI = $\mathbf{\frac{1}{2}\sqrt{5}}$.

2. 34x − 51y = 2012z dengan x, y, z adalah bilangan prima.
   Karena 34 dan 2012 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2. Karena y prima maka y = 2.
   Karena 34 dan 51 habis dibagi 17 maka z habis dibagi 17. Karena z prima maka z = 17.
   34x − 51(2) = 2012(17)
   x = 1009 yang memenuhi bahwa x adalah bilangan prima.
   x + y + z = 1009 + 2 + 17 = 1028
   ∴ Jadi, nilai dari x + y + z adalah **1028**.

3. Banyaknya kejadian semua angka dadu berbeda = 8 x 7 x 6 x 5.
   Peluang ada angka yang sama = $1 - \frac{8x7x6x5}{8^4} = \frac{151}{256}$
   ∴ Jadi, peluang ada angka yang sama = $\frac{151}{256}$

4. $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a}$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$ dengan a adalah bilangan bulat positif.

$(gof)(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a - \frac{\sqrt{2\lfloor x \rfloor - 2a}}{\sqrt{a}}}$

Karena $3\frac{1}{2} \le x < 4$ maka $\lfloor x \rfloor = 3$.

Untuk $3\frac{1}{2} \le x < 4$ maka $f(x) = \sqrt{3 - a}$ sehingga

$(gof)(x) = \sqrt{3 - a - \frac{\sqrt{6 - 2a}}{\sqrt{a}}}$

Syarat yang harus dipenuhi adalah

$a \le 3$ ………………… (1) dan

$3 - a - \frac{\sqrt{6 - 2a}}{\sqrt{a}} \ge 0$

$a(3 - a)^2 \ge 6 - 2a$ ………………… (2)

Jika a = 1 maka $1 \cdot (3 - 1)^2 = 4$ dan $6 - 2(1) = 4$

Jika a = 2 maka $2 \cdot (3 - 2)^2 = 2$ dan $6 - 2(2) = 2$

Jika a = 3 maka $3 \cdot (3 - 3)^2 = 0$ dan $6 - 2(3) = 0$

Maka nilai a bulat positif yang memenuhi adalah a = 1 atau a = 2 atau a = 3.

$\therefore$ Banyaknya nilai a yang memenuhi ada **3**.

5. Karena $n^2 + pn$ bilangan kuadrat sempurna maka $4n^2 + 4pn$ juga merupakan kuadrat sempurna.

$4n^2 + 4pn = m^2$ dengan n, m $\in$ N dan p adalah bilangan prima.

$(2n + p)^2 - p^2 = m^2$

$p^2 = (2n + p + m)(2n + p - m)$

Maka ada 2 kasus :

- Jika $2n + p + m = p$ dan $2n + p - m = p$
  Maka didapat $2n + p = 0$ dan $2n - p = 0$
  Didapat n = 0 yang tidak memenuhi syarat bahwa n $\in$ N.
- Jika $2n + p + m = p^2$ dan $2n + p - m = 1$
  Jumlahkan kedua persamaan didapat
  $4n + 2p = p^2 + 1$
  $4n = (p - 1)^2$
  $n = \frac{(p-1)^2}{4}$
  Karena p adalah bilangan prima ganjil maka akan didapat n $\in$ N.

$\therefore$ Jadi, $\boldsymbol{S = \left\{n \middle| n = \frac{(p-1)^2}{4}\right\}}$ **dengan p bilangan prima > 2.**

6. $\{\sqrt[3]{k}\} = n = 2012m$ dengan m $\in$ N

$n - \frac{1}{2} < \sqrt[3]{k} < n + \frac{1}{2}$

$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8} < k < n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$

Karena n habis dibagi 2012 maka $\frac{3}{2}n^2$ dan $\frac{3}{4}n$ keduanya bilangan asli. Jadi,

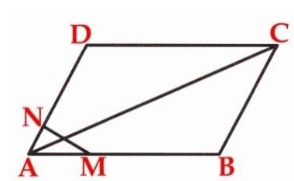
$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n \le k \le n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n$

Maka banyaknya nilai k yang memenuhi ada $\left(n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n\right)-\left(n^3-\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{4}n\right)+1=3n^2+1$.

∴ Jadi, banyaknya nilai k yang memenuhi ada $\mathbf{3n^2+1}$.

7. Jelas bahwa 123456789123456789…123456789 tidak habis dibagi 2 atau 5.
Karena banyaknya bilangan ada tak terhingga maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) pasti ada 2 bilangan di antaranya yang memiliki sisa yang sama jika dibagi suatu bilangan tertentu.
Misalkan m = 123456789123456789…123456789 adalah bilangan yang terdiri dari 9a angka sedangkan n = 123456789123456789…123456789 adalah bilangan terdiri dari 9b angka yang keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi p dengan p < 100 dan p tidak habis dibagi 2 atau 5.
m − n = 123456789…000000000… yang habis dibagi p.
m − n adalah bilangan 9a angka yang terdiri dari 9(a − b) angka berbentuk 123456789… dan dikuti angka 0 sebanyak 9b angka.
Karena m − n habis dibagi p sedangkan p tidak habis dibagi 2 atau 5 maka bilangan 123456789… yang terdiri dari 9(a − b) angka akan habis dibagi p < 100.
Jadi, 123456789123456789…123456789 akan habis dibagi oleh semua n < 100 dengan n tidak habis dibagi 2 atau 5.
Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 atau 5 = $\left\lfloor\frac{99}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{99}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{99}{10}\right\rfloor=59$.
Banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 2 atau 5 = 99 − 59 = 40.
∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n < 100 yang memenuhi ada **40**.

8. Alternatif 1 :



Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan D(b, c).
Maka koordinat C(b + a, c). Koordinat $M\left(\frac{17}{1000}a,0\right)$ dan $N\left(\frac{17}{2009}b,\frac{17}{2009}c\right)$.
Persamaan garis AC adalah $y=\frac{c}{b+a}x$
Persamaan garis MN adalah $y-0=\frac{\frac{17}{2009}c-0}{\frac{17}{2009}b-\frac{17}{1000}a}\left(x-\frac{17}{1000}a\right)$
Perpotongan garis AC dan MN adalah titik P

$$\frac{c}{b+a}x_P=\frac{1000c}{1000b-2009a}\left(x_P-\frac{17}{1000}a\right)$$
$$\frac{1}{b+a}x_P=\frac{1000}{1000b-2009a}x_P-\frac{17}{1000b-2009a}a$$
$$\frac{17a}{1000b-2009a}=\frac{1000}{1000b-2009a}x_P-\frac{1}{b+a}x_P=x_P\left(\frac{3009a}{(b+a)(1000b-2009a)}\right)$$

$x_P=\frac{b+a}{177}$ sehingga $y_P=\frac{c}{b+a}x_P=\frac{c}{177}$. Jadi, koordinat $P\left(\frac{b+a}{177},\frac{c}{177}\right)$.

Maka $\frac{AC}{AP}=\frac{x_C-x_A}{x_P-x_A}=\frac{y_C-y_A}{y_P-y_A}=177$

∴ Jadi, $\frac{AC}{AP}=\mathbf{177}$.

Alternatif 2 :
Buat garis sejajar AB melalui N dan memotong diagonal AC di Q. Maka ΔANQ ≅ ΔADC.

$\frac{AQ}{AC} = \frac{AN}{AD} = \frac{NQ}{DC} = \frac{17}{2009}$

Karena NQ sejajar AM maka ΔNPQ ≅ ΔMPA.

$\frac{PQ}{AP} = \frac{NQ}{AM} = \frac{\frac{17}{2009}DC}{\frac{17}{1000}AB} = \frac{1000}{2009}$

$\frac{AQ}{AP} = \frac{PQ}{AP} + 1 = \frac{3009}{2009}$

$\frac{AC}{AP} = \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{AQ}{AP} = \frac{2009}{17} \cdot \frac{3009}{2009} = 177$

∴ Jadi, $\frac{AC}{AP} = \mathbf{177}$.

9. Misalkan A, B, C dan D adalah 4 orang dalam arah searah jarum jam yang tidak duduk dekat pasangannya dan x_A, x_B, x_C dan x_D adalah banyaknya kursi yang berada antara A dan B, antara B dan C, antara C dan D dan antara D dan A. Jelas bahwa x_A, x_B, x_C dan x_D semuanya genap. Ada 4 kasus :
   - Kasus 1, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 0$ dan $x_D = 6$.
     A, B, C dan D akan berdekatan. Agar di antara mereka tidak ada sepasang suami isteri maka mereka harus duduk berselang seling.
     Banyaknya cara memilih A ada 10. Banyaknya cara memilih B hanya 8 sebab B tidak boleh pasangan A. Cara memilih C dan D hanya ada satu cara memilihnya sebab mereka pasangannya A dan B.
     Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
     Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.
   - Kasus 2, $x_A = 0$, $x_B = 2$, $x_C = 2$ dan $x_D = 2$.
     A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah 10 x 8. C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah 2 x 1.
     Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
     Banyaknya susunan = 10 x 8 x 2 x 1 x 48 = 7680.
   - Kasus 3, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 2$ dan $x_D = 4$.
     A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.
     Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
     Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.
   - Kasus 4, $x_A = 0$, $x_B = 2$, $x_C = 0$ dan $x_D = 4$.
     A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah 10 x 8. C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah 2 x 1.
     Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
     Banyaknya susunan = 10 x 8 x 2 x 1 x 48 = 7680
   - Kasus 5, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 4$ dan $x_D = 2$.
     A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.
     Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48.
     Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840

   Banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = 10 x 8 x 7 x 1 x 48 = 26880.

   ∴ Jadi, banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = **26880**.

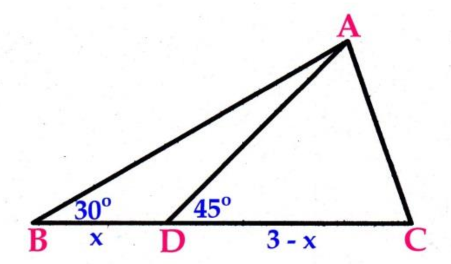
10. $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ akar-akarnya p, q dan r.
$p + q + r = 1$
$pq + pr + qr = 1$
$pqr = 2$
Alternatif 1 :
$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3p^2q + 3p^2r + 3pq^2 + 3pr^2 + 3q^2r + 3qr^2 + 6pqr$
$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(pq + pr + qr)(p + q + r) - 3pqr$
$1^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(1)(1) - 3(2)$
$p^3 + q^3 + r^3 = 4$

Alternatif 2 :
$p^2 + q^2 + r^2 = (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$
p, q dan r adalah akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ maka
$p^3 - p^2 + p - 2 = 0$
$q^3 - q^2 + q - 2 = 0$
$r^3 - r^2 + r - 2 = 0$
Didapat
$p^3 + q^3 + r^3 - (p^2 + q^2 + r^2) + p + q + r = 6$
$p^3 + q^3 + r^3 + 1 + 1 = 6$
$p^3 + q^3 + r^3 = 4$
$\therefore$ Jadi, $p^3 + q^3 + r^3 = \mathbf{4}$.

11. $m^2 + n^5 = 252$ dengan m, n $\in$ N
$n^5 \leq 252$ sehingga $n \leq 3$
- Jika n = 1 maka $m^2 = 251$. Tidak ada m $\in$ N yang memenuhi.
- Jika n = 2 maka $m^2 = 220$. Tidak ada m $\in$ N yang memenuhi.
- Jika n = 3 maka $m^2 = 9$. Nilai m $\in$ N yang memenuhi hanya m = 3.

Maka pasangan (m, n) yang memenuhi adalah (3, 3).
$\therefore$ Jadi, m + n = **6**.

12. Misalkan panjang BD = x. Karena $\angle ADC = 45^o$ maka $\angle ADB = 135^o$ sehingga $\angle BAD = 15^o$.



$$\frac{AD}{\sin 30^o} = \frac{BD}{\sin 15^o}$$
$AD = 2x \cos 15^o$.
Pada ΔACD berlaku
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos 45^o$
$AC^2 = (2x \cos 15^o)^2 + (3 - x)^2 - 2(2x \cos 15^o)(3 - x) \cos 45^o$
Maka nilai AC bergantung dengan x.
$\therefore$ Jadi, belum dapat ditentukan panjang AC.

13. Ada 2 kasus :
    - Jika D sebagai pelari pertama
      Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 4, pelari ke-3 ada 3, pelari ke-4 ada 2 dan pelari ke-5 ada 1.
      Banyaknya cara = 4x3x2x1 = 24
    - Jika D bukan sebagai pelari pertama
      Banyaknya cara memilih pelari ke-1 ada 3.
      Banyaknya cara memilih pelari ke-5 ada 3.
      Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 3 dan pelari ke-3 ada 2 dan pelari ke-4 ada 1.
      Banyaknya cara = 3x3x2x1x3 = 54

    Banyaknya cara menyusun pelari = 24 + 54 = 78.
    $\therefore$ Jadi, banyaknya cara menyusun pelari = **78**.

14. H = $\{2^0 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^1, 2^0 \cdot 3^2, 2^0 \cdot 3^3, \cdots, 2^{10} \cdot 3^0)$
    Alternatif 1 :
    $3^6 = 729$ dan $3^7 = 2187$
    $2^{10} = 1024$ dan $2^{11} = 2048$.
    $x = \frac{2^{10} \cdot 3^6 + 2^{10} \cdot 3^5 + 2^{10} \cdot 3^4 + \cdots + 2^0 \cdot 3^6}{2^{10} \cdot 3^6} = \frac{p}{q}$ dengan q = $2^{10} \cdot 3^6$.
    p = $3^6 \cdot (2^{10} + 2^9 + \cdots + 1) + 3^5 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^1) + 3^4 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^3) + 3^3 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^4) + 3^2 \cdot (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^6) + 3^1 \cdot (2^{10} + 2^{10} + \cdots + 2^7) + 3^0 \cdot (2^{10} + 2^9)$
    p = $3^6 \cdot (2^{11} - 1) + 3^5 \cdot 2^1 \cdot (2^{10} - 1) + 3^4 \cdot 2^3 \cdot (2^8 - 1) + 3^3 \cdot 2^4 \cdot (2^7 - 1) + 3^2 \cdot 2^6 \cdot (2^5 - 1) + 3^1 \cdot 2^7 \cdot (2^4 - 1) + 3^0 \cdot 2^9 \cdot (2^2 - 1)$
    p = 1492263 + 497178 + 165240 + 54862 + 17856 + 5760 + 1536 = 2.234.697.
    q = $2^{10} \cdot 3^6$ = 746.496
    $2 < \frac{p}{q} < 3$
    $\therefore$ Jadi, $\lfloor x \rfloor = \mathbf{2}$.

    Alternatif 2 :
    $$x = \frac{1}{2^0 3^0} + \frac{1}{2^0 3^1} + \cdots + \frac{1}{2^{10} 3^0} < \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^\infty}\right)\left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \cdots + \frac{1}{3^\infty}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$
    $$x > \frac{1}{2^0 3^0} + \frac{1}{2^1 3^0} + \frac{1}{2^0 3^1} + \frac{1}{2^1 3^1} = 2$$
    Karena $2 < x < 3$ maka $\lfloor x \rfloor = 2$.
    $\therefore$ Jadi, $\lfloor x \rfloor = \mathbf{2}$.

15. Misalkan M dan N bertuurt-turut adalah pusat lingkaran Γ_1 dan Γ_2. Misalkan juga MN berpotongan dengan AB di R. Jelas bahwa R adalah pertengahan AB. Jadi, AR = RB = 5.

Jelas bahwa garis melalui kedua pusat lingkaran akan memotong tegak lurus talibusur persekutuan. Jadi, AR $\perp$ MR dan AR $\perp$ RN.
Karena MA = 13 dan AR = 5 maka MR = 12. Jadi, RP = 1 dan QR = PQ − RP = 3 − 1 = 2.
Misalkan jari-jari Γ_2 = r.
$AN^2 = AR^2 + RN^2$
$r^2 = 5^2 + (r - 2)^2$
4r = 29
$\therefore$ Jadi jari-jari lingkaran Γ_2 = $\mathbf{\frac{29}{4}}$.

16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}=\frac{3}{4}$ dengan x, y $\in$ Z
Jelas bahwa x,y $\neq$ 0.
- Jika x < 0 maka
  $\frac{1}{x}-\frac{1}{xy^2}\leq 0$
  $\frac{1}{y}\geq\frac{3}{4}$
  Nilai y yang memenuhi hanya y = 1
  Tetapi untuk y = 1 maka $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}=1\neq\frac{3}{4}$
- Jika x > 0
  - Jika y < 0
    $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}<\frac{1}{x}$
    Nilai x yang memenuhi hanya x = 1.
    $\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-\frac{1}{4}$
    $4y - 4 = -y^2$
    $(y + 2)^2 = 8$
    Tidak ada y bulat yang memenuhi.
  - Jika y > 0
    - Jika x $\leq$ y
      $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{2}{x}$
      x $\leq$ 2
      Jika x = 1 maka tidak ada y yang memenuhi.
      Jika x = 2 maka $\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}=\frac{1}{4}$
      $4y - 2 = y^2$
      $(y - 2)^2 = 2$
      Tidak ada y bulat yang memenuhi.
    - Jika y $\leq$ x
      $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{2}{y}$
      y $\leq$ 2
      Jika y = 1 maka tidak ada x bulat yang memenuhi.
      Jika y = 2 maka $\frac{1}{4}=\frac{3}{4x}$ yang dipenuhi oleh x = 3.
      Pasangan (x, y) = (3, 2) memenuhi persamaan.

Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi ada 1.
$\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi ada **1**.

17. $xy = \frac{1}{3}$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka

$\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6} \geq 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{9x^6}\right)\left(\frac{1}{4y^6}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{xy}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$

$\therefore$ Jadi,nilai minimal dari $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah **9.**

18. $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$

Alternatif 1 :

Lemma :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $4^n > 4n^2$ untuk $n \in N$ dan $n > 2$.

Bukti :

Jika n = 3 maka $64 = 4^3 > 4 \cdot (3)^2 = 36$

Andaikan benar untuk n = k maka diangap benar $4^k > 4k^2$

$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k - 2) \cdot 8k + 16k + 4k^2$

Karena k > 2 maka $4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k - 2) \cdot 8k + 16k + 4k^2 > 4k^2 + 8k + 4 = 4(k + 1)^2$

Maka terbukti bahwa jika $4^k > 4k^2$ maka $4^{k+1} > 4(k + 1)^2$ untuk k > 2.

Jadi, terbukti bahwa $4^n > 4n^2$ untuk $n \in N$ dan n > 2

$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

Karena ruas kiri habis dibagi 4 maka b genap. Misalkan b = 2m maka

$4^{a-1} + a^2 + 1 = m^2$

Jika a ganjil maka ruas kiri dibagi 4 akan bersisa 2 atau 3 yang tidak memenuhi syarat.

Misalkan a = 2n maka

$4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = m^2$

Berdasarkan lemma untuk n > 2 maka

$(2^{2n-1})^2 = 4^{2n-1} < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < 4^{2n-1} + 4^n + 1 = (2^{2n-1})^2 + 2 \cdot 2^{2n-1} + 1 = (2^{2n-1} + 1)^2$

$(2^{2n-1})^2 < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < (2^{2n-1} + 1)^2$

$(2^{2n-1})^2 < m^2 < (2^{2n-1} + 1)^2$

Jadi, untuk n > 2 maka m^2 terletak di antara 2 bilangan kuadrat berurutan. Maka tidak ada n yang memenuhi.

Jika n = 1 maka $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 9 = 3^2$.

Jika n = 2 maka $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 81 = 9^2$.

Maka pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi adalah (2, 6), (4, 18).

$\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi ada **2**.

Alternatif 2 :

Jelas bahwa $b^2 > 4^a$ sehingga $b^2 > 2^a$.

Dari persamaan $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ didapat bahwa b genap.

Maka $b \geq 2^a + 2$

$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4$

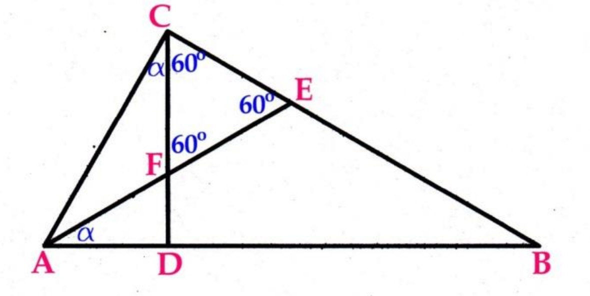
$a^2 \geq 2^a$ sehingga $a \leq 4$.

Nilai a yang memenuhi hanya jika a = 2 atau 4.

Maka pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi adalah (2, 6), (4, 18).

$\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi ada **2**.

19. Misalkan $\angle$BAE = $\angle$ACD = α. Misalkan juga panjang AC = x sehingga panjang AB = 2x.



Karena $\angle$CFE = 60° maka $\angle$AFC = 120°.
Karena $\angle$AFC = 120° dan $\angle$ACF = α maka $\angle$CAF = 60° − α sehingga $\angle$BAC = 60°.
Karena $\angle$BAC = 60° dan $\angle$ACB = 60° + α maka $\angle$ABC = 60° − α.

Berdasarkan dalil sinus pada ΔABC maka

$\frac{AB}{\sin(60^o+\alpha)} = \frac{AC}{\sin(60^o-\alpha)}$

Karena AB = 2AC maka

2 sin (60° − α) = sin (60° + α)

$2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha$

$\cot\alpha = \sqrt{3}$

α = 30°

$\angle$ABC = 60° − α = 30°.

∴ Jadi, besar $\angle$ABC = **30°**.

20. Bilangan pangkat 2, pangkat 4, pangkat 6, pangkat 8 dan pangkat 10 semuanya merupakan bilangan pangkat 2. Bilangan pangkat 9 juga merupakan bilangan pangkat 3. Jadi, persoalan setara dengan mencarai banyaknya bilangan pangkat 2 atau pangkat 3 atau pangkat 5 atau pangkat 7. Misalkan A, B, C dan D berturut-turut adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif n ≤ 2012 yang merupakan pangkat 2, pangkat 3, pangkat 5 dan pangkat 7.

Karena 44^2 = 1936 dan 45^2 = 2025 maka banyaknya anggota himpunan A = $|A|$ = 44.
Karena 12^3 = 1728 dan 13^3 = 2197 maka banyaknya anggota himpunan B = $|B|$ = 12.
Karena 4^5 = 1024 dan 5^5 = 3125 maka banyaknya anggota himpunan C = $|C|$ = 4.
Karena 2^7 = 128 dan 3^7 = 2187 maka banyaknya anggota himpunan D = $|D|$ = 2.

A∩B adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif n ≤ 2012 yang merupakan pangkat 2 dan juga pangkat 3 yang berarti merupakan himpunan pangkat 6.

Karena 3^6 = 729 dan 4^6 = 4096 maka banyaknya anggota himpunan A∩B = $|A\cap B|$ = 3.

Dengan cara yang sama didapat

$|A\cap C| = 2$; $|A\cap D| = 1$; $|B\cap C| = 1$; $|B\cap D| = 1$; $|C\cap D| = 1$.

$|A\cap B\cap C| = 1$; $|A\cap B\cap D| = 1$; $|A\cap C\cap D| = 1$; $|B\cap C\cap D| = 1$.

$|A\cap B\cap C\cap D| = 1$

$|A\cup B\cup C\cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| - |A\cap B\cap C\cap D|$.

$|A\cup B\cup C\cup D|$ = 44 + 12 + 4 + 2 − 3 − 2 − 1 − 1 − 1 − 1 + 1 + 1 + 1 + 1 − 1 = 56

∴ Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi ada **56**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2012
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2013

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. a, b, x, y bilangan bulat tak negatif.
   a + b = xy
   x + y = ab
   Jika salah satu di antara a, b, x dan y sama dengan 0, tanpa mengurangi keumuman misalkan saja a = 0 maka x + y = 0 sehingga x = y = 0 dan membuat b = 0.
   Jadi, jika salah satu di antara a, b, x atau y sama dengan 0 maka yang lain akan sama dengan 0.
   Andaikan bahwa tidak ada satupun di antara a, b, x atau y sama dengan 0.
   Karena a dan b simetris maka dapat diandaikan $a \le b$.
   Karena a bilangan bulat lebih dari 0 maka $x + y = ab \ge b$
   $2x + 2y \ge 2b$
   Karena $a \le b$ maka $xy = a + b \le 2b$
   $2x + 2y \ge 2b \ge a + b = xy$
   Jadi, didapat $2x + 2y \ge xy$
   $(x - 2)(y - 2) \le 4$
   Karena x dan y simetris maka tanpa mengurangi keumuman dapat dimisallkan $x \le y$.
   Maka $x \le 4$.
   - Jika x = 1
     a + b = y dan 1 + y = ab
     1 + a + b = ab
     (a − 1)(b − 1) = 2
     Didapat a = 2 dan b = 3 sehingga y = 5
   - Jika x = 2
     a + b = 2y dan 2 + y = ab
     4 + a + b = 2ab
     (2a − 1)(2b − 1) = 9
     Didapat a = 1 dan b = 5 sehingga y = 3 atau a = 2 dan b = 2 sehingga y = 2
   - Jika x = 3
     a + b = 3y dan 3 + y = ab
     9 + a + b = 3ab
     (3a − 1)(3b − 1) = 28
     Didapat a = 1 dan b = 5 sehingga y = 2
   - Jika x = 4
     Maka y = 4
     a + b = 16 dan 8 = ab
     Tidak ada a dan b bulat yang memenuhi.

   ∴ Semua tupel (a,b,x,y) yang memenuhi adalah **(0,0,0,0), (1,5,2,3), (1,5,3,2), (2,2,2,2), (2,3,1,5), (2,3,5,1), (3,2,1,5), (3,2,5,1), (5,1,2,3), (5,1,3,2).**

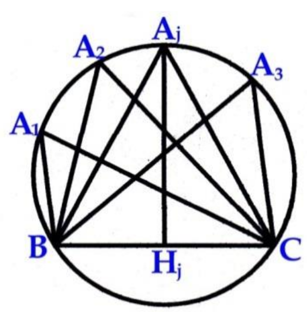
2. $x = 1 + \sqrt{y - z^2}$
   $y = 1 + \sqrt{z - x^2}$
   $z = 1 + \sqrt{x - y^2}$
   Karena akar suatu bilangan tidak mungkin negatif maka $x, y, z \ge 1$.
   Alternatif 1 :
   Karena $x, y, z \ge 1$ maka $x^2 \ge x$; $y^2 \ge y$ dan $z^2 \ge z$

Karena x real maka $y \geq z^2 \geq z \geq x^2 \geq x \geq y^2$
Karena $y \geq y^2$ dan $y^2 \geq y$ maka haruslah $y = y^2$ yang dipenuhi oleh y = 1.
Dengan cara yang sama didapat x = z = 1.
Setelah dicek ke persamaan semula ternyata x = y = z = 1 memenuhi.

Alternatif 2 :
Karena x, y, z ≥ 1 maka xyz ≥ 1
Jelas bahwa $y \geq z^2$; $z \geq x^2$ dan $z \geq y^2$.
Kalikan ketiga persamaan di atas didapat
$xyz \geq (xyz)^2$
$xyz \leq 1$
Karena xyz ≤ 1 adan xyz ≥ 1 maka haruslah xyz = 1 yang dipenuhi hanya jika x = y = z = 1.
Setelah dicek ke persamaan semula ternyata x = y = z = 1 memenuhi.
∴ Jadi, tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi **x = y = z = 1**.

3. Misalkan kawan-kawan laki-laki tersebut adalah A, B, C, D, E dan F,
$|A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F| = 11 \cdot {}_6C_1 - 6 \cdot {}_6C_2 + 4 \cdot {}_6C_3 - 3 \cdot {}_6C_4 + 3 \cdot {}_6C_5 - 10 \cdot {}_6C_6$
$|S| - 9 = 66 - 90 + 80 - 45 + 18 - 10 = 19$
$|S| = 28$
Maka laki-laki tersebut pergi ke restoran sebanyak 28 kali.
Catatan : Penulis berkeyakinan bahwa maksud soal adalah seperti tersebut di atas. Bertemu dengan tepat tiga di antaranya berarti juga bertemu dengan 2 di antaranya. Persyaratan yang dipenuhi haruslah banyaknya pertemuan dengan semuanya paling banyak harus sama dengan pertemuan dengan lima di antaranya. Ternyata bertemu dengan semuanya sebanyak 10 kali lebih banyak dari bertemu dengan setiap lima di antaranya,yaitu 3 kali.
Jika tidak, maka soal harus diartikan bertemu dengan setiap lima di antaranya tidak berarti juga bertemu dengan empat di antaranya.
$|A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F| = 11 \cdot {}_6C_1 + 6 \cdot {}_6C_2 + 4 \cdot {}_6C_3 + 3 \cdot {}_6C_4 + 3 \cdot {}_6C_5 + 10 \cdot {}_6C_6$
$|S| - 9 = 66 + 90 + 80 + 45 + 18 + 10 = 309$
$|S| = 318$.
∴ Jadi, laki-laki tersebut makan di restoran sebanyak **28 kali**.

4. Andaikan A_i dengan i = 1, 2, 3, ⋯ adalah kumpulan titik-titik sehingga $\angle BA_iC = \alpha$ maka kumpulan titik-titik tersebut akan membentuk suatu lingkaran.



Misalkan H_i pada BC sehingga A_iH_i tegak lurus BC.
Jelas bahwa A_iH_i akan maksimum jika H_i merupakan pertengahan BC.
Misalkan A_iH_i maksimum = y. Saat A_iH_i = y maka AB = AC. Misalkan saja saat ini AB = AC = x.
$y^2 = x^2 - a^2$

$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{2x^2-a^2}{2x^2}$

$\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A = \frac{ay}{x^2}$

$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A = \frac{4x^3-2ax^2+a^3-4ay^2}{2x^2} = \frac{4x^3-2ax^2+a^3-4ax^2+a^3}{2x^2}$

$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A = \frac{4x(x-a)^2+2a(x-a)^2}{2x^2} = \frac{2(x-a)^2(2x+a)}{2x^2}$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A \ge 0$ sehingga

$BC\cos A + 2y\sin A \le 2x = AB + AC$

Maka didapat $BC\cos\angle BAC + 2AH\sin\angle BAC \le BC\cos\angle BAC + 2y\sin\angle BAC \le 2x = AB + AC$

$\therefore$ **Jadi, terbukti bahwa $AB + AC \ge BC\cos\angle BAC + 2AH\sin\angle BAC$**

5. *Lemma 1* :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $3^{2n+1} > (n+1)^4$ untuk n ∈ N dan n > 1.

Bukti :

- Jika n = 2 maka 443 = $3^{2(2)+1} > (2+1)^4 = 81$
- Andaikan bentuk untuk n = k. Maka $3^{2k+1} > (k+1)^4$ dianggap benar untuk k ∈ N dan k > 1.
- $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k+1)^4 = 9k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 9 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9$

  $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k+1)^4 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9 > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16$

  $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16 = (k+2)^4$

Jadi, terbukti bahwa $3^{2n+1} > (n+1)^4$ untuk n ∈ N dan n > 1

Lemma 2 :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$ untuk n ∈ N dan n > 1.

Bukti :

- Jika n = 2 maka $16 = (2!)^4 < 3^{2^2-1} = 27$
- Andaikan benar untuk n = k. Maka $(k!)^4 < 3^{k^2-1}$ dianggap benar untuk k ∈ N dan k > 1.
- Sesuai lemma 1 maka

  $\left((k+1)!\right)^4 = (k+1)^4(k!)^4 < 3^{2k+1}\cdot 3^{k^2-1} = 3^{(k+1)^2-1}$

Jadi, terbukti bahwa $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$ untuk n ∈ N dan n > 1

- Jika i = 1

  P_i = 2 dan untuk n = 2 maka ${P_i}^{(n^2)} = P_{i-1}\cdot(n!)^4$

  Jadi, untuk i = 1 sehingga P_i = 2 tidak termasuk bilangan prima sederhana.
- Jika i > 1

  $P_i \ge 3$

  - Jika n = 1

    ${P_i}^{(n^2)} = P_i > P_{i-1} = P_{i-1}\cdot(n!)^4$

    Jadi, untuk n = 1 maka ${P_i}^{(n^2)} > P_{i-1}\cdot(n!)^4$
  - Jika n > 1

    Sesuai *lemma 2* dan mengingat bahwa $P_i > P_{i-1}$ didapat

    $(n!)^4 < 3^{n^2-1} \le {P_i}^{(n^2-1)} < \frac{P_i}{P_{i-1}}{P_i}^{(n^2-1)}$

    $P_{i-1}(n!)^4 < {P_i}^{(n^2)}$

  Terbukti bahwa ${P_i}^{(n^2)} > P_{i-1}\cdot(n!)^4$ untuk i > 1 dan n ∈ N.

$\therefore$ Jadi, semua bilangan prima sederhana adalah P_i **dengan i ∈ N dan i ≠ 1.**