SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2015
CALON TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2016

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. 2015 = 5 · 13 · 31
   Banyaknya faktor positif = 2 · 2 · 2 = 8
   ∴ Jadi, banyaknya faktor bulat positif dari 2015 adalah **8**.

2. Semua kemungkinan jumlah keenam dadu sama dengan 9 adalah (1,1,1,1,1,4), (1,1,1,1,2,3), (1,1,1,2,2,2).
   Maka ada 3 kasus :
   a. Kasus 1, jika susunannya adalah (1,1,1,1,1,4).
      Banyaknya permutasi adalah $\frac{6!}{5!}$ = 6
   b. Kasus 2, jika susunannya adalah (1,1,1,1,2,3).
      Banyaknya permutasi adalah $\frac{6!}{4!}$ = 30
   c. Kasus 3, jika susunannya adalah (1,1,1,2,2,2).
      Banyaknya permutasi adalah $\frac{6!}{3!3!}$ = 20

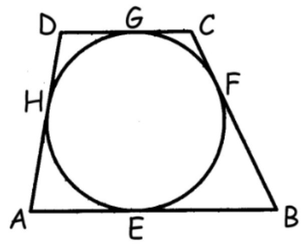
   Jadi, banyaknya cara = 56.
   ∴ Jadi, probabilitas jumlah mata yang muncul 9 adalah $\boldsymbol{\frac{56}{6^6}}$.

3. $g(x) = 2x - 4$
   $$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{7x+3}{5x-9}$$

   Alternatif 1 :
   $g(3) = 2(3) - 4 = 2$
   $$f(2) = f\big(g(3)\big) = \frac{7(3)+3}{5(3)-9} = 4$$

   Alternatif 2 :
   $$f(2x-4) = \frac{7x+3}{5x-9}$$
   Misalkan $y = 2x - 4$ maka $x = \frac{y+4}{2}$.
   $$f(y) = \frac{7\left(\frac{y+4}{2}\right)+3}{5\left(\frac{y+4}{2}\right)-9} = \frac{7y+34}{5y+2}$$
   Yang setara dengan
   $$f(x) = \frac{7x+34}{5y+2}$$
   $$f(2) = \frac{7(2)+34}{5(2)+2} = 4$$
   ∴ Jadi, nilai f(2) adalah **4**.

4. Jika titik P di luar lingkaran dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran tersebut di titik Q dan R maka PQ = PR.



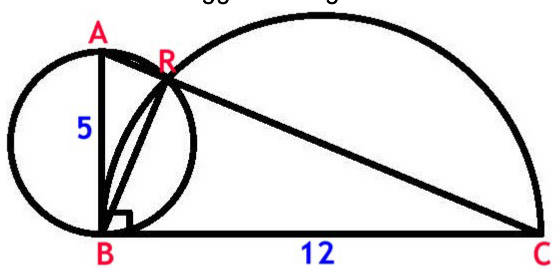
Dari gambar di atas didapat DG = DH ; CG = CF ; BF = BE ; AE = AH
Keliling = AE + AH + BE + BF + CF + CG + DG + DH = 2 (DG + CG + AE + BE)
Keliling = 2(DC + AB) = 2(25 + 84)
∴ Keliling trapesium = **218**

5. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \cdots$ merupakan barisan geometri dengan rasio r dan $a_1 = a$.
$a_1 + a_3 = a(1 + r^3) = 20$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = a(r^3 + 1)(r^2 + r + 1) = 20(r^2 + r + 1)$$
Karena $(Ax^2 + Bx + C)_{min} = \frac{4AC - B^2}{4A}$ untuk $A > 0$ maka $(r^2 + r + 1)_{min} = \frac{3}{4}$.
Maka nilai minimum dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ adalah $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$.
∴ Jadi, nilai minimum dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ adalah $\mathbf{15}$.

6. 1500 < 11x < 2000 sehingga 136 < x < 182
970 < 7x < 1275 sehingga 138 < x < 183
690 < 5x < 900 sehingga 138 < x < 180
Maka 138 < x < 180
Bilangan yang habis dibagi 3 dan 5 maka bilangan tersebut habis dibagi 15.
Bilangan yang habis dibagi 15 ada 2 yaitu 150 dan 165.
∴ Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi ada **2**.

7. Karena setiap siswa memiliki paling sedikit satu teman dari kelompok belajar yang sama yang duduk disampingnya maka setiap siswa dalam kelompok belajar yang sama akan duduk berdekatan. Jika setiap kelompok dinyatakan sebagai obyek maka akan ada 5 obyek yang duduk membentuk lingkaran serta ada permutasi susunan duduk siswa pada masing-masing obyek.
Banyaknya cara melakukan = (5 – 1)! · 2! · 2! · 2! · 3! · 3! = 6912.
∴ Jadi, banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah **6912**.

8. Misalkan titik R terletak pada sisi AC sehingga BR tegak lurus AC.



Karena ∠ARB = 90° maka lingkaran berdiameter AB akan melalui titik R.
Karena ∠BRC = 90° maka lingkaran berdiameter BC akan melalui titik R.
Jadi, titik R = P.
AC · BP = AB · BC
13 · BP = 5 · 12

$$BP = x = \frac{60}{13}$$

$$\frac{240}{x} = 52$$

∴ Jadi, nilai dari $\frac{240}{x}$ adalah **52**.

9. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6$
$a^2 + ab + b^2 = 4$
$a^4 + b^4 + a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2ab(a^2 + b^2) = 4^2$
$2a^2b^2 + 2ab(4 - ab) = 10$
Misalkan $y = ab > 0$

$$ab = \frac{5}{4}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = 4 + \frac{5}{4} = \frac{21}{4}$$

$$a + b = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

∴ Jadi, nilai $a + b$ adalah $\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{2}}$.

10. Segitiga dibentuk dari 3 titik. Maka banyaknya segitiga = ${}_{20}C_3$ = 1140.
Agar luas segitiga positif maka ketiga titik tidak boleh berada pada satu garis lurus. Maka akan dicari banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus.

- Pada arah horisontal
  Ada 4 buah 5 titik berada pada satu garis lurus.
  Banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus = 4 · ${}_{5}C_3$ = 40.
- Pada arah vertikal
  Ada 5 buah 4 titik berada pada satu garis lurus.
  Banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus = 5 · ${}_{4}C_3$ = 20.
- Pada arah diagonal
  * 4 titik berada pada satu garis lurus
    Ada 2 buah dengan gradien 1 dan ada 2 buah dengan gradien −1.
    Maka banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus = 4 · ${}_{4}C_3$ = 16.
  * 3 titik berada pada satu garis lurus
    Ada 2 buah dengan gradien 1, ada 2 buah dengan gradien −1, ada 2 buah dengan gradien 1/2 dan ada 2 buah dengan gradien −1/2.
    Maka banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus = 8 · ${}_{3}C_3$ = 8.

Maka banyaknya segitiga dengan luas positif = 1140 − 40 − 20 − 16 − 8 = 1056.
∴ Jadi, banyaknya segitiga dengan luas positif adalah **1056**.

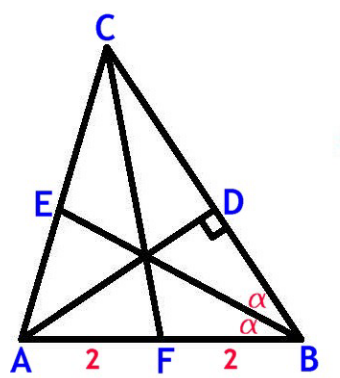
11. $31^n + x \cdot 96^n$ habis dibagi 2015 = 5 · 13 · 31 maka
$31^n + x \cdot 96^n \equiv 1^n + x \cdot 1^n \pmod 5 \equiv 1 + x \pmod 5$
Jadi, $x \equiv -1 \pmod 5$
$31^n + x \cdot 96^n \equiv 5^n + x \cdot 5^n \pmod{13}$
Jadi, $x \equiv -1 \pmod{13}$
$31^n + x \cdot 96^n \equiv x \cdot 3^n \pmod{31}$
FPB (3, 31) = 1 maka $x \equiv 0 \pmod{31}$
Maka x = 31a dengan $a \in N$
$31a \equiv -1 \pmod{13}$
$5a \equiv -1 \pmod{13}$
a = 13b + 5 dengan $b \in N$
x = 31(13b + 5) = 403b + 155
$403b + 155 \equiv -1 \pmod 5$
$403b \equiv -1 \pmod 5$
$3b \equiv -1 \pmod 5$
Maka b = 5c + 3
x = 403b + 65 = 403(5c + 3) + 155 = 2015c + 1364 dengan $c \in N$
∴ Jadi, nilai terkecil x yang memenuhi adalah **1364.**

12. $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$
Maka $n^2 - n + 1$ membagi $n^3 + 1$
Misalkan $y = n^8 + n^7 + n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2017$
$y = n^5(n^3 + 1) + n^4(n^3 + 1) + n^3(n^3 + 1) + n^2(n^3 + 1) + n(n^3 + 1) + n^3 + 1 + n^2 - n + 1 + 2015$
Maka haruslah $n^2 - n + 1$ membagi 2015.
$$n^2 - n + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$
Maka $n^2 - n + 1 \geq 1$
Ada 8 kasus :
- Jika $n^2 - n + 1 = 1$
  Maka n = 0 atau n = 1
- Jika $n^2 - n + 1 = 5$
  Tidak ada n bulat yang memenuhi.
- Jika $n^2 - n + 1 = 13$
  Maka n = 4 atau n = –3
- Jika $n^2 - n + 1 = 31$
  Maka n = 6 atau n = –5
- Jika $n^2 - n + 1 = 65$
  Tidak ada n bulat yang memenuhi.
- Jika $n^2 - n + 1 = 155$
  Tidak ada n bulat yang memenuhi.
- Jika $n^2 - n + 1 = 403$
  Tidak ada n bulat yang memenuhi.
- Jika $n^2 - n + 1 = 2015$
  Tidak ada n bulat yang memenuhi.

∴ Jadi, semua n bulat yang memenuhi adalah **–5, –3, 0, 1, 4, 6**.

13. $x^3 - 5x^2 - 9x + 10 = 0$ akar-akarnya a, b dan c.
$a + b + c = 5$
$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx - 2015$
$P(a) = b + c = 5 - a$
$Aa^3 + Ba^2 + Ca - 2015 = 5 - a$
$Aa^3 + Ba^2 + (C + 1)a - 2020 = 0$ .... (1)
$P(b) = a + c = 5 - b$
$Ab^3 + Bb^2 + Cb - 2015 = 5 - a$
$Ab^3 + Bb^2 + (C + 1)b - 2020 = 0$ .... (2)
$P(c) = a + b = 5 - c$
$Ac^3 + Bc^2 + Cc - 2015 = 5 - a$
$Ac^3 + Bc^2 + (C + 1)c - 2020 = 0$ .... (3)
Berdasarkan (1), (2) dan (3) maka $Ax^3 + Bx^2 + (C + 1)x - 2020 = 0$ juga akan memiliki akar-akar a, b dan c.
Dengan membandingkan persamaan di atas dengan persamaan $x^3 - 5x^2 - 9x + 10 = 0$ didapat $A = -202$; $B = -202(-5) = 1010$ dan $C + 1 = -202(-9) = 1818$ sehingga $C = 1817$
$A + B + C = -202 + 1010 + 1817 = 2625$
∴ Jadi, nilai A + B + C adalah **2625**.

14. Karena CF adalah garis berat maka AF = FB = 2



Karena BE adalah garis bagi maka

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{4}$$

Ketiga garis bertemu di satu titik maka sesuai dali Ceva didapat

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

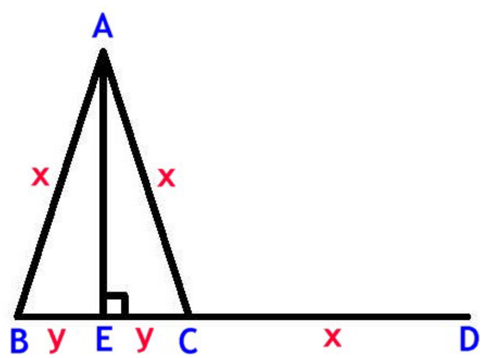
$$\frac{2}{2} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

Maka $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$
Misalkan BD = 4x maka CD = 5x
BD + CD = 5 maka x = $\frac{5}{9}$
Maka panjang $CD = \frac{25}{9} = \frac{m^2}{n^2}$
Didapat m = 5 dan n = 3.
∴ Jadi, nilai m – n adalah **2**.

15. n = a + b dengan $n \leq 2015$ dan $n, a, b \in N$.
Jelas bahwa b < a
$a + b = n \leq 2015$
$2b < n \leq 2015$ maka $b \leq 1007$
Andaikan FPB(a, b) = d
Maka a = dp dan b = dq
a − b = d(p − q) merupakan bilangan prima. Maka d = 1
Karena ab kuadrat sempurna sedangkan FPB (a, b) = 1 maka haruslah a dan b masing-masing kuadrat sempurna.
Misalkan $a = m^2$ dan $b = t^2$
$t^2 \leq 1007$ sehingga $t \leq 31$
$a - b = m^2 - t^2 = (m + t)(m - t)$ adalah bilangan prima.
Maka m − t = 1
$a - b = (t + 1)^2 - t^2 = 2t + 1 \leq 63$ adalah bilangan pima ganjil.
Bilangan prima ganjil ≤ 63 adalah 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 dan 61. Banyaknya nilai b yang memenuhi ada 17.
Maka banyaknya nilai n yang memenuhi ada 17.
∴ Jadi, banyaknya nilai n yang memenuhi ada **17**.

16. Misalkan panjang BC = 2y dan AB = AC = CD = x. Titik E pertengahan BC sehingga BE = EC = y.
$\angle BAE = \angle CAE$
$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha$
$\sin (36^o) = \sin (90^o - 54^o) = \cos 54^o$
$2 \sin 18^o \cos 18^o = 4 \cos^3 18^o - 3 \cos 18^o$
$2 \sin 18^o = 4 - 4 \sin^2 18^o - 3$
$4 \sin^2 18^o + 2 \sin 18^o - 1 = 0$

$$\sin 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$



$$\frac{1}{|CD|} - \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|BD| + |CD|}$$
$$|BD|^2 - |CD|^2 = |BD||CD|$$
$$(2y + x)^2 - x^2 = (2y + x)(x)$$
$$4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$$
$$\frac{y}{x} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$\sin \angle BAE = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\angle BAE = 18^o$

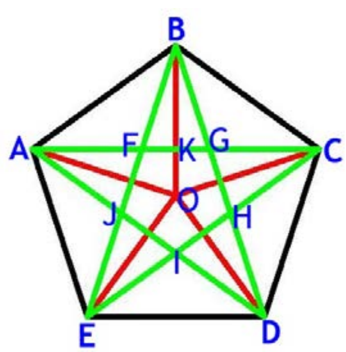
Maka $\angle$BAC = 36^o.

$\therefore$ Jadi, besar $\angle$BAC adalah **36^o**.

17. Misalkan bilangan-bilangan pada baris pertama adalah a, b dan c. Pada baris kedua adalah d, e, f dan baris ketiga g, h, i.
Jika a = b maka agar memenuhi a + b + c habis dibagi 3 maka a = b = c.
Jika a ≠ b maka agar memenuhi a + b + c habis dibagi 3 maka a, b, c semuanya berbeda dengan a, b, c $\in$ {1, 2, 3}.
Maka masing-masing ada 3 kemungkinan untuk nilai a dan b. Nilai c menyesuaikan sehingga hanya ada 1 kemungkinan.
Maka masing-masing ada 3 kemungkinan untuk nilai d dan e. Nilai f menyesuaikan sehingga hanya ada 1 kemungkinan.
Jelas nilai g, h, i hanya menyesuaikan dengan bilangan-bilangan di atasnya. Jadi, masing-masing hanya ada 1 kemungkinan.
Cukup membuktikan bahwa jika a + b + c, d + e + f, a + d + g, b + e + h dan c + f + i masing-masing habis dibagi 3 maka g + h + i juga habis dibagi 3.
g = 3k − a − d, h = 3m − b − e dan i = 3n − c − f
g + h + i = 3(k + m + n) − (a + b + c) − (d + e + f) yang habis dibagi 3.
Jadi, banyaknya kemungkinan yang memenuhi ada 3 x 3 x 3 x 3 = 81.
$\therefore$ Jadi, banyaknya penomoran yang memenuhi adalah **81**.

18. cos 3α = 4 cos$^3\alpha$ − 3 cos α
sin (36^o) = sin (90^o − 54^o) = cos 54^o
2 sin 18^o cos 18^o = 4 cos^{3}18^o − 3 cos 18^o
2 sin 18^o = 4 − 4 sin^{2}18^o − 3
4 sin^{2}18^o + 2 sin 18^o − 1 = 0

$\sin 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$



$\angle$AOB = $\frac{360^o}{5}$ = 72^o sehingga $\angle$ABC = 108^o.
Maka $\angle$BAC = 36^o.

$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin 108^o}{\sin 36^o} = \frac{\sin 72^o}{\sin 36^o} = 2\cos 36^o$

$\angle$ABK = 54^o sehingga $\angle$FBK = 54^o − 36^o = 18^o.

$\frac{FG}{AC} = \frac{FK}{AK} = \frac{\tan 18^o}{\tan 54^o} = \frac{\sin 18^o}{\cos 18^o} \cdot \frac{\sin 36^o}{\cos 36^o}$

$\frac{FG}{AB} = \frac{2 \cdot \sin 18^o \cdot \sin 36^o}{\cos 18^o} = (2 \cdot \sin 18^o)^2$

Segilima ABCDE dan FGHIJ sebangun maka perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai kuadrat perbandingan sisi-sisinya.

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AB}{FG}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot \sin 18^o}\right)^4 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

∴ Jadi, nilai $\frac{S_1}{S_2}$ adalah $\mathbf{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$.

19. Misalkan p, q ∈ {1, 2, 3, ⋯, 10} dengan p < q serta a_{i-1} = q dan a_i = p.

Maka semua bilangan kurang dari p akan berada di kiri q dan semua bilangan lebih dari q akan berada di kanan p.

Semua bilangan di antara p dan q bisa berada di kiri q maupun di kanan p.

Maka persoalannya setara dengan banyaknya cara memilih bilangan di antara p dan q untuk ditaruh di kiri q.

Misalkan n adalah banyaknya bilangan di antara p dan q dengan n ∈ {0 1, 2, ⋯, 8}

Maka banyaknya cara memilih bilangan = $_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$.

Banyaknya pasangan (p, q) untuk n = 0, 1, 2 ⋯, 8 berturut-turut adalah 9, 8, 7, ⋯, 1.

Banyaknya permutasi hampir naik = $9 \cdot 2^0 + 8 \cdot 2^1 + 7 \cdot 2^2 + \cdots + 1 \cdot 2^8 = 1013$.

∴ Jadi, banyaknya permutasi hampir naik adalah **1013**.

20. $f(a)$ adalah nilai maksimum dari $\left|\sin x + \frac{2}{\sin x + 3} + a\right|$ untuk $a \in R$.

$-1 \le \sin x \le 1$

Misalkan $t = 3 + \sin x$ maka $2 \le t \le 4$

$\left|\sin x + \frac{2}{\sin x + 3} + a\right| = \left|t + \frac{2}{t} + a - 3\right|$

Dengan $3 \le t + \frac{2}{t} \le \frac{9}{2}$ sehingga $0 \le t + \frac{2}{t} - 3 \le \frac{3}{2}$

Untuk $a \ge -\frac{3}{4}$ maka $f(a) = \left|a + \frac{3}{2}\right| = a + \frac{3}{2}$

Karena linier maka $a + \frac{3}{2}$ minimum ketika $a = -\frac{3}{4}$

Untuk $a \le -\frac{3}{4}$ maka $f(a) = |a + 0| = -a$

Karena linier maka $-a$ minimum ketika $a = -\frac{3}{4}$

∴ Jadi, nilai minimum $f(a)$ adalah $\mathbf{\frac{3}{4}}$.