SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2014
CALON TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2015

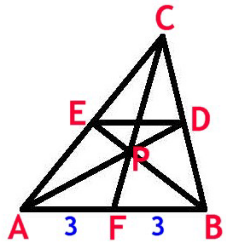
Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Ketiga garis berat bertemu di satu titik. Karena AD dan CF garis berat maka BE juga garis berat.



Karena $\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB}$ dan ∠ECD = ∠ACB maka ΔCED ≅ ΔCAB.
Karena $\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2}$ maka $DE = \frac{AB}{2} = 3$
∴ Jadi, panjang **DE = 3**.

2. Misalkan bilangan pertama adalah x maka bilangan kedua adalah x + 1 dan bilangan ketiga x + 2.
x, x + 11, x + 2 + p membentuk deret ukur (geometri) dengan p adalah bilangan prima. Maka
$(x + 11)^2 = x(x + 2 + p)$
22x + 121 = (2 + p)x
Maka x│121
   - Jika x = 1
     Maka p = 141 = 3 · 47 (tidak memenuhi p bilangan prima)
   - Jika x = 11
     33 = 2 + p sehingga p = 31
   - Jika x = 121
     23 = 2 + p sehingga p = 21 (tidak memenuhi p bilangan prima)

Maka nlai x yang memenuhi adalah x = 11 dengan p = 31.
∴ Jadi, bilangan ketiga dari bilangan bulat berurutan adalah **13**.

3. Diketahui $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 6$$
Karena $a + b = 6$ maka $ab = 1$
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1980 = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 1980 = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 1980 = \frac{6^2 - 2(1)}{1} + 1980 = 34 + 1980 = 2014$$
∴ Jadi, nilai dari $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1980$ adalah **2014**.

4. $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$
$$\sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{2014} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2014!} - \frac{1}{2015!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2015!}$$
$$\frac{1}{2015!} + \sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2015!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2015!} = 1$$
∴ Jadi, $\boldsymbol{\frac{1}{2015!} + \sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = 1}$

5. Berdasarkan ketaksamaan AM-GM didapat
$$\frac{16\sin^2 x + 9}{\sin x} = 16\sin x + \frac{9}{\sin x} \geq 2\sqrt{16\sin x \cdot \frac{9}{\sin x}} = 24$$
Tanda kesamaan terjadi jika $16\sin x = \frac{9}{\sin x}$ yang memenuhi syarat $0 < x < \pi$.
∴ Jadi, nilai minimum dari $\frac{16\sin^2 x + 9}{\sin x}$ adalah **24**.

6. Anggota S terdiri dari 1 digit ada 4 yang setiap digit muncul sebagai satuan 1 kali.
Anggota S terdiri dari 2 digit ada 4 · 3 = 12 yang setiap digit muncul sebagai satuan 3 kali.
Anggota S terdiri dari 3 digit ada 4 · 3 · 2 = 24 yang setiap digit muncul sebagai satuan 6 kali.
Anggota S terdiri dari 4 digit ada 4! = 24 yang setiap digit muncul sebagai satuan 6 kali.
Jadi, masing-masing digit akan muncul sebanyak 16 kali.
Jumlah digit satuan dari semua anggota S = 16 · (1 + 3 + 5 + 7) = 256
∴ Jadi, Jumlah digit satuan dari semua anggota S adalah **256**.

7. Alternatif 1 :
$\log_x w = 4$ sehingga $\log_w x = \frac{1}{4}$.
$\log_y w = 5$ sehingga $\log_w y = \frac{1}{5}$.
$\log_{xyz} w = 2$ sehingga $\log_w xyz = \frac{1}{2}$.
$\log_w x + \log_w y + \log_w z = \log_w xyz$ sehingga $\log_w z = \frac{1}{20}$.
∴ Jadi, nilai $\mathbf{\log_z w = 20}$

Alternatif 2 :
$\log_x w = 4$ sehingga $x = w^{1/4}$
$\log_y w = 5$ sehingga $y = w^{1/5}$.
$\log_{xyz} w = 2$ sehingga $xyz = w^{1/2}$.
$(w^{1/4})(w^{1/5})z = w^{1/2}$
$z = w^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)} = w^{1/20}$
∴ Jadi, nilai $\mathbf{\log_z w = 20}$

8. Kemungkinan susunan keenam siswa adalah :
- Susunannya adalah 4, 1, 1.
$\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}(4-1)! = 180$
Terdapat perhitungan ganda pada perhitungan di atas. Contoh : A, B, C. D berada di meja I, E di meja II dan F di meja III dianggap berbeda dengan A, B, C. D berada di meja I, F di meja II dan E di meja III padahal seharusnya sama. Maka perhitungan tersebut harus dibagi 2!.
Jadi, banyaknya susunan = $\frac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}(4-1)!}{2!} = 90$
- Susunannya adalah 3, 2, 1.
$\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}(3-1)!\,(2-1)! = 120$

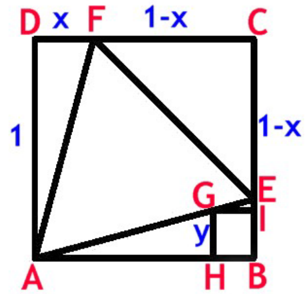
- Susunannya adalah 2, 2, 2.

  $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$

Jadi, banyaknya susunan seluruhnya = 90 + 120 + 15 = 225.

∴ Jadi, susunan keenam siswa tersebut adalah **225**.

9. Misalkan panjang sisi persegi yang melalui B adalah y.



Alternatif 1 :

Karena simetris maka ∠EAB = ∠FAD = 15°.

$\tan 15^o = \tan(60^o - 45^o) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$

$\frac{GH}{AH} = \frac{y}{1-y} = \tan 15^o = 2 - \sqrt{3}$

$y(1 + 2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$

$y = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \frac{a-\sqrt{b}}{c}$

Maka $a = 3$; $b = 3$ dan $c = 6$

∴ Jadi, nilai $a + b + c$ adalah **12**.

Alternatif 2 :

Karena simetris maka $BE = DF = x$.

$AF = EF$

$1^2 + x^2 = (1-x)^2 + (1-x)^2$

$x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = 2 - \sqrt{3}$

$\Delta EAB \cong \Delta GAH$

$\frac{GH}{AH} = \frac{EB}{AB}$

$\frac{y}{1-y} = \frac{2-\sqrt{3}}{1}$

$y(1 + 2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$

$y = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} = \frac{a-\sqrt{b}}{c}$

Maka $a = 3$; $b = 3$ dan $c = 6$

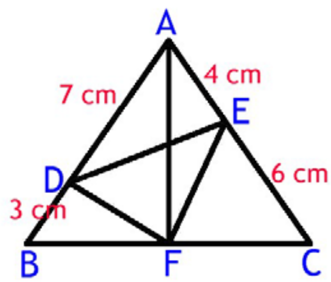
∴ Jadi, nilai $a + b + c$ adalah **12**.

10. Persoalan setara dengan menyelesaian persamaan
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ dengan $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N$.
Misalkan $a = x_1 - 1$; $b = x_2 - 1$; $c = x_3 - 1$; $d = x_4 - 1$ maka
$a + b + c + d = 6$ dengan $a, b, c, d \in N_0$.
Maka banyaknya tupel bilangan (a, b, c, d) yang memenuhi = $\binom{6+4-1}{3}$ = 84.
∴ Jadi, banyaknya macam variasi isi bungkusan permen adalah **84**.

11. $1111 \equiv 5276 \equiv 8251 \equiv 9441 \equiv k \pmod N$
$9441 - 8251 = 1190 = 2 \cdot 595 \equiv 0 \pmod N$; $9441 - 5276 = 4165 = 7 \cdot 595 \equiv 0 \pmod N$
$9441 - 1111 = 8330 = 14 \cdot 595 \equiv 0 \pmod N$; $8251 - 5276 = 2975 = 5 \cdot 595 \equiv 0 \pmod N$
$8251 - 1111 = 7140 = 12 \cdot 595 \equiv 0 \pmod N$; $5276 - 1111 = 4165 = 7 \cdot 595 \equiv 0 \pmod N$
FPB (1190, 4165, 8330, 2975, 7140) = 595
Maka nilai N terbesar yang memenuhi adalah 595.
∴ Jadi, nilai N terbesar yang memiliki sifat tersebut adalah **595**

12. Urutan abjad adalah A, M, N, O, S, T.
Maka NTSOMA berada pada urutan $3 \cdot 5! = 360$.
ONTSMA berada pada urutan $360 + 3 \cdot 4! = 432$.
OSMTNA berada pada urutan $432 + 2 \cdot 3! = 444$.
Urutan berikutnya adalah OSNAMT, OSNATM, OSNMAT, OSNMTA, OSNTAM, OSNTMA.
Maka OSNMAT berada pada urutan ke-447.
∴ Jadi, OSNMAT pada urutan ke-**447**.

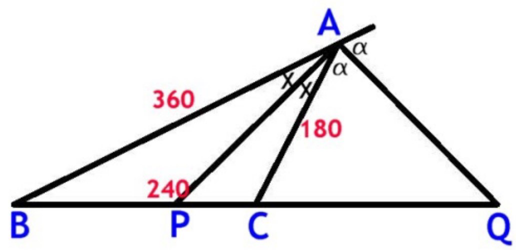
13. AF adalah garis tinggi.



Karena AB = AC maka F adalah pertengahan BC sehingga BF = FC.
$$[BDF] = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BF \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{3}{20}[ABC]$$
$$[CEF] = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CF \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{3}{10}[ABC]$$
$$[ADFE] = [ABC] - [BDF] - [CEF] = \frac{11}{20}[ABC]$$
$$\frac{[ADFE]}{[ABC]} = \frac{11}{20}$$
Maka $a = 11$ dan $b = 20$
∴ Jadi, nilai $a + b$ adalah **31**.

14. $2x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{2x^2 + 3x + 12}$
Misalkan $p = \sqrt{2x^2 + 3x + 12}$
Karena akar suatu bilangan real tidak mungkin negatif maka $p \geq 0$.
$p^2 - 8 = 2p$
$(p - 4)(p + 2) = 0$
Karena $p \geq 0$ maka $p = 4$
$2x^2 + 3x + 12 = 4^2$
$2x^2 + 3x - 4 = 0$
Hasil kali semua akar = $\frac{C}{A}$ = –2
∴ Jadi, hasil kali semua akar real sama dengan **–2.**

15. AB = 360 ; AC = 180 dan BC = 240



Karena AP garis bagi maka $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}$ sehingga $\frac{360}{180} = \frac{BP}{240-BP}$
Maka BP = 160 dan PC = 80
Karena AQ garis bagi maka $\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CQ}$ sehingga $\frac{360}{180} = \frac{240+CQ}{CQ}$
Maka CQ = 240
Maka PQ = PC + CQ = 80 + 240 = 320
$2 \cdot \angle CAQ + 2 \cdot \angle CAP = 180^o$
$\angle PAQ = \angle CAQ + \angle CAP = 90^o$
Karena $\angle PAQ = 90^o$ maka PQ adalah diameter lingkaran yang melalui titik A, P dan Q.
∴ Jadi, jari-jari lingkaran yang melalui titik-titik A, P, dan Q adalah **160**.

16. $f(x) = ax^2 + bx + c$
Penyelesaian soal berikut didasrkan pada soal asli yang telah disesuaikan. Pada soal aslinya dinyatakan bahwa $f(x)$ selalu positif dan itu diganti menjadi $f(x)$ tidak pernah negatif. Selain itu dalam soal aslinya tertulis $b \neq 0$ dan diganti menjadi $b > 0$.
Syarat $f(x)$ tidak pernah negatif adalah $a > 0$ dan $b^2 - 4ac \leq 0$
Karena $4ac \geq b^2 > 0$ maka $c > 0$

$$\frac{ac}{b^2} \geq \frac{1}{4}$$

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat

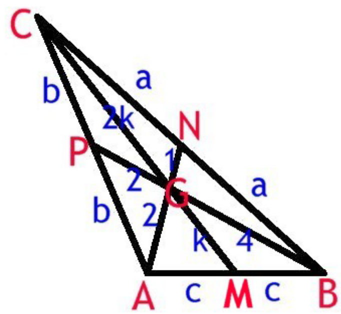
$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b}} = 2\sqrt{\frac{ac}{b^2}} = 1$$

Tanda kesamaan terjadi jika $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ atau $a = c$ dan $b^2 = 4ac$ yang setara dengan $b = 2a = 2c$.
∴ Jadi, nilai terkecil yang mungkin untuk $\frac{a+c}{b}$ adalah **1**.

17. $(7p-q)^2 = 2(p-1)q^2$
$49p^2 - 14pq + q^2 = 2(p-1)q^2$
Maka $q \mid 49p^2$
Karena p dan q prima maka ada 2 kasus :
- Kasus 1, $q = 7$
$p^2 - 2p + 1 = 2p - 2$
$(p-3)(p-1) = 0$
Karena p prima maka $p = 3$.
- Kasus 2, $q \mid p$
Maka $q = p$
$36p^2 = 2(p-1)p^2$
$p = q = 19$

$\therefore$ Jadi, semua pasangan bilangan prima (p, q) yang memenuhi adalah $(\mathbf{3}, \mathbf{7})$ dan $(\mathbf{19}, \mathbf{19})$.

18. Misalkan panjang BC = 2a, AC = 2b dan AB = 2c
Misalkan garis berat dari C memotong sisi AB di Q dan perpotongan ketiga garis berat di G.
Misalkan juga panjang garis berat CQ = 3k sehingga GQ = k



$[ABP] = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{15} = \frac{3}{2}\sqrt{15}$
Karena PG : GB = 1 : 2 maka $[ABG] = \sqrt{15}$
Perhatikan ΔABG.
$s = \frac{2c+2+4}{2} = c + 3$
Dengan rumus Heron didapat
$[ABG] = \sqrt{(c+3)(3-c)(c+1)(c-1)} = \sqrt{15}$
$c^4 - 10c^2 + 9 = -15$
$(c^2-4)(c^2-6) = 0$
- Jika $c = \sqrt{6}$
Maka $AB = 2\sqrt{6}$
$$\cos \angle GAB = \frac{2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - k^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{6}}$$
$k = 2$
Karena GM = GP maka AB = AC. Kontradiksi dengan panjang ketiga sisi berbeda.
- Jika $c = 2$
Maka $AB = 4$
$$\cos \angle GAB = \frac{2^2 + 2^2 - k^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 4}$$

$k = \sqrt{6}$

$CM = 3k = 3\sqrt{6}$

$\therefore$ Jadi, panjang garis berat ketiga, CM adalah $\mathbf{3\sqrt{6}}$.

19. 20! + 14! = 243290*a*0953*b*4931200

 20! + 14! habis dibagi 9 maupun 11.

 9 | (2+4+3+2+9+0+a+0+9+5+3+b+4+9+3+1+2+0+0) = 56 + a + b

 a + b = 7 atau a + b = 16

 11 | (2–4+3–2+9–0+a–0+9–5+3–b+4–9+3–1+2–0+0) = 14 + a – b

 Maka a – b = –3 atau a – b = 8

 Berdasarkan paritas (a + b dan a – b memiliki paritas yang sama) maka ada 2 kasus :

 - Kasus 1, a + b = 7 dan a – b = –3
 Maka didapat a = 2 dan b = 5
 - Kasus 2, a + b = 16 dan a – b = 8
 Maka didapat a = 12 dan b = 4 yang tidak memenuhi syarat bahwa a adalah digit bilangan.

 Maka a = 2 dan b = 5

 $\therefore$ Jadi, nilai a dan b adalah **a = 2 dan b = 5**.

20. $n^4 - 51n^2 + 225 = (n^2 + 15)^2 - 81n^2 = (n^2 - 9n + 15)(n^2 + 9n + 15)$

 Jika $n = k$ memenuhi untuk suatu $k \in N_0$ maka $n = -k$ juga memenuhi. Maka tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan $n \geq 0$.

 Karena $n^4 - 51n^2 + 225$ prima dan $n^2 + 9n + 15 \geq n^2 - 9n + 15$ maka $n^2 - 9n + 15 = 1$

 $n^2 - 9n + 14 = 0$

 $(n - 2)(n - 7) = 0$

 n bulat yang memenuhi adalah $n = 2$ atau 7

 $\therefore$ Jadi, semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah $\mathbf{-7, -2, 2, 7}$.