SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2013
CALON TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2014

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

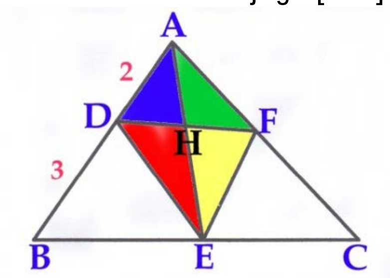
SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
   2013 = 61 · 33 dan 94 = 61 + 33
   $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{61} + \sqrt{33}$
   Maka, $a = 61$ dan $b = 33$
   ∴ Jadi, nilai $a - b$ adalah 28.

2. Misalkan H adalah perpotongan AE dan DF. Misalkan juga [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ.



   Karena [ABE] = [ABEF] maka [ADH] = [EFH]
   Karena [ADH] = [EFH] maka [ADF] = [AEF].

   Karena △ADF dan △AEF memiliki alas yang sama dan luas keduanya juga sama maka tinggi keduanya harus sama. Jadi, DE akan sejajar AC.

   Karena DE sejajar AC maka △DBE sebangun dengan △ABC
   Jadi, BE : EC = 3 : 2
   [ABE] : [ABC] = 3 : 5
   [ABE] = 6
   ∴ Jadi, luas segitiga ABE sama dengan **6**.

3. $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$
   $q = x^{2013}(p - x)$
   Maka $x = \pm 1$
   - Jika x = –1
     q = –p – 1
     p + q = –1 yang tidak mungkin terpenuhi kesamaan sebab p dan q prima.
   - Jika x = 1
     q = p – 1
     p – q = 1
     Dua bilangan prima berselisih 1 hanya p = 3 dan q = 2.

   ∴ Jadi, p + q = **5**.

4. $f(x) = \frac{kx}{2x+3}$
   $f(f(x)) = x$
   $$\frac{k\left(\frac{kx}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{kx}{2x+3}\right) + 3} = x$$
   $k^2 = 2kx + 3(2x + 3)$
   $(k + 3)(k - 2x - 3) = 0$

$k = -3$ atau $k = 2x + 3$
Karena k adalah konstanta maka $k = -3$.
$\therefore$ Jadi, nilai k adalah **–3**.

5. Nampaknya ada kesalahan dalam soal. Soal seharusnya adalah menentukan koefisien dari x^{2013} pada ekspansi

$$(1 + x)^{4016} + x(1 + x)^{4015} + x^2(1 + x)^{4014} + \cdots + x^{2013}(1 + x)^{2003}$$

Maka koefisien x^{2013} adalah $\binom{4016}{2013} + \binom{4015}{2012} + \binom{4014}{2011} + \cdots + \binom{2003}{0}$.

$\binom{4016}{2013} + \binom{4015}{2012} + \binom{4014}{2011} + \cdots + \binom{2003}{0} = \binom{4016}{2003} + \binom{4015}{2003} + \binom{4014}{2003} + \cdots + \binom{2003}{2003}$.

Rumus :

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$$

Bukti (dengan induksi matematika) :

- Jika n = 1

$$\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$$

- Andaikan benar untuk n = k

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+k-1}{m} = \binom{m+k}{m+1}$$

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+k-1}{m} + \binom{m+k}{m} = \binom{m+k}{m+1} + \binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1}$$

Terbukti benar untuk n = k + 1

Maka $\binom{4016}{2003} + \binom{4015}{2003} + \binom{4014}{2003} + \cdots + \binom{2003}{2003} = \binom{4017}{2004} = \binom{4017}{2013}$

$\therefore$ Jadi, koefisien x^{2013} pada ekspansi tersebut adalah $\boldsymbol{\binom{4017}{2004}}$.

6. $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$

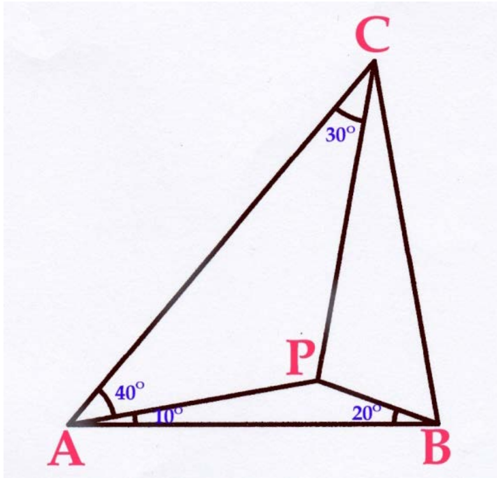
$2(y - x) = xy$
$y - x = 2$
$xy = 4$
$(x + y)^2 - (y - x)^2 = 4xy$
$(x + y)^2 = (2)^2 + 4(4) = 20$
$\therefore$ Jadi, $(x + y)^2$ = **20**

7. Semua kemungkinan susunan jumlah mata dadu sama dengan 28 dengan angka 6 muncul tepat sekali adalah :

- Susunan dadu (6,5,5,5,5,2)
  Banyaknya susunan = $\frac{6!}{4!}$ = 30
- Susunan dadu (6,5,5,5,4,3)
  Banyaknya susunan = $\frac{6!}{3!}$ = 120
- Susunan dadu (6,5,5,4,4,4)
  Banyaknya susunan = $\frac{6!}{3!2!}$ = 60

Maka banyaknya semua kemungkinan adalah 30 + 120 + 60 = 210
$\therefore$ Jadi, banyak cara memperoleh jumlah mata 28 dengan tepat satu dadu muncul 6 = **210**.

8. $\angle PAB = 10^o$, $\angle PBA = 20^o$, $\angle PCA = 30^o$, dan $\angle PAC = 40^o$.



$\angle APB = 150^o$ dan $\angle APC = 110^o$. Maka $\angle BPC = 100^o$. Misalkan $\angle PBC = x$ maka $\angle PCB = 80^o - x$.

Dengan dalil sinus pada $\triangle APB$ didapat

$AP = \frac{\sin 20^o}{\sin 150^o} AB$ .... (1)

Dengan dalil sinus pada $\triangle APC$ didapat

$AP = \frac{\sin 30^o}{\sin 110^o} AC$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) didapat

$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 30^o \sin 150^o}{\sin 20^o \sin 110^o}$ .... (3)

$\angle ABC = \angle PBA + \angle PBC = 20^o + x$ dan $\angle ACB = \angle ACP + \angle PCB = 110^o - x$

Dengan dalil sinus pada $\triangle ABC$ didapat

$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(110^o - x)}{\sin(20^o + x)}$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) didapat

$\sin(20^o + x) \sin 30^o \sin 150^o = \sin(110^o - x) \sin 20^o \sin 110^o$

Mengingat $\sin 110^o = \cos 20^o$ maka

$\sin(20^o + x) = 2 \sin(110^o - x) \sin 40^o$

$\sin(20^o + x) = 2 \sin(110^o - x) \cos 50^o = \sin(160^o - x) + \sin(60^o - x)$

Mengingat bahwa $\sin(160^o - x) = \sin(20^o + x)$ maka

$\sin(60^o - x) = 0$

Jadi, $x = 60^o$

$\angle ABC = 20^o + x = 80^o$

$\therefore$ Jadi, $\angle ABC =$ **80^o**.

9. Misalkan (a,b) adalah kejadian munculnya angka a pada pengambilan kartu dan angka b pada pelemparan dadu. Agar hasil kali kedua angka merupakan bilangan kuadrat maka kemungkinan semua kejadian adalah (1,1), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4), (5,5), (6,6), (8,2), (9,1), (9,4) yang banyaknya ada 11. Peluang masing-masing kejadian adalah $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$.

Maka peluang seluruh kejadian = $\frac{11}{60}$.

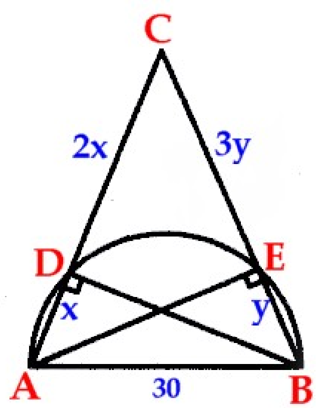
$\therefore$ Jadi, peluang seluruh kejadian = $\mathbf{\frac{11}{60}}$

10. Kemungkinan susunan keenam siswa adalah :
- Susunannya adalah 4, 1, 1.
  $\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}(4-1)! = 180$
  Terdapat perhitungan ganda pada perhitungan di atas. Contoh : A, B, C. D berada di meja I, E di meja II dan F di meja III dianggap berbeda dengan A, B, C. D berada di meja I, F di meja II dan E di meja III padahal seharusnya sama. Maka perhitungan tersebut harus dibagi 2!.
  Jadi, banyaknya susunan = $\frac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}(4-1)!}{2!} = 90$
- Susunannya adalah 3, 2, 1.
  $\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}(3-1)!\,(2-1)! = 120$
- Susunannya adalah 2, 2, 2.
  $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$

Jadi, banyaknya susunan seluruhnya = 90 + 120 + 15 = 225.
$\therefore$ Jadi, susunan keenam siswa tersebut adalah **225**.

11. Banyaknya cara melangkah dari titik (0,0) ke (3,4) adalah $_7C_3$ = 35.
Banyaknya cara melangkah dari titk (3,4) ke titik (6,4) adalah $_3C_0$ = 1.
Banyaknya langkah ke kanan dari titik (0,0) ke titik (6,4) ada sebanyak 6 dan langkah ke atas ada sebanyak 4.
Maka peluang kejadian = $35 \cdot 1 \cdot (0{,}6)^6 \cdot (0{,}4)^4$.
$\therefore$ Jadi, peluang kejadian = $\mathbf{35 \cdot 1 \cdot (0{,}6)^6 \cdot (0{,}4)^4 = \frac{81648}{5^9}}$

12. Karena titik D dan E terletak pada setengah lingkaran maka $\angle AEB = \angle ADB = 90^o$.



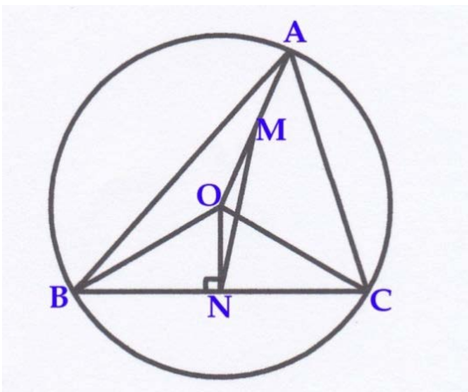
Misalkan panjang AC = 3x dan BC = 4y. Maka AD = x ; DC = 2x ; BE = y dan EC = 3y
Pada ΔAEB berlaku :
$AB^2 = BE^2 + AE^2$
$AE^2 = 900 - y^2$ .... (1)
Pada ΔAEC berlaku :
$AC^2 = AE^2 + EC^2$
$AE^2 = 9x^2 - 9y^2$ .... (2)
Dari persamaan (1) dan (2) didapat
$9x^2 - 8y^2 = 900$ .... (3)

Pada $\triangle$BAD berlaku :
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
$BD^2 = 900 - x^2$ .... (4)
Pada $\triangle$BCD berlaku :
$BC^2 = BD^2 + CD^2$
$BD^2 = 16y^2 - 4x^2$ .... (5)
Dari persamaan (4) dan (5) didapat
$16y^2 - 3x^2 = 900$ .... (6)
Dari persamaan (3) dan (6) didapat
$x^2 = 180$ sehingga $x = 6\sqrt{5}$ serta
$y^2 = 90$ sehingga $y = 3\sqrt{10}$
$AC = 3x = 18\sqrt{5}$
$BD^2 = 16y^2 - 4x^2 = 16(90) - 4(180) = 720$ sehingga $BD = 12\sqrt{5}$
Luas $\triangle ABC = \frac{1}{2}\, AC \cdot BD = 9\sqrt{5} \cdot 12\sqrt{5} = 540$
$\therefore$ Jadi, luas segitiga ABC sama dengan **540**.

13. $(1 + \cos\alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$
$\left(1 - \cos^2\alpha\right)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1 - \cos\alpha)$
Mengingat bahwa $1 - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ dan dengan melakukan terus menerus didapat
$(1 - \cos 8\alpha) = (1 - \cos\alpha)$
$\cos 8\alpha = \cos\alpha$
$8\alpha = \alpha + k \cdot 360^o$ atau $8\alpha = -\alpha + k \cdot 360^o$
- $7\alpha = k \cdot 360^o$
  Karena $0 < \alpha < 90^o$ maka ada 1 nilai α yang memenuhi.
- $9\alpha = k \cdot 360^o$
  $\alpha = k \cdot 40^o$
  Karena $0 < \alpha < 90^o$ maka ada 2 nilai α yang memenuhi.

Maka banyaknya nilai α yang memenuhi ada 1 + 2 = 3.
$\therefore$ Jadi, banyaknya nilai α yang memenuhi ada **3**.

14. Misalkan $\angle OMN = \alpha$ maka $\angle ABC = 4\alpha$ dan $\angle ACB = 6\alpha$
Karena N pertengahan BC maka $\angle CNO = 90^o$.



Sudut pusat = 2 kali sudut keliling.

$\angle AOB = 2\angle ACB = 12\alpha$ sehingga $\angle OBA = \angle OAB = 90^o - 6\alpha$.
$\angle AOC = 2\angle ABC = 8\alpha$
Karena $\angle ABC = 4\alpha$ maka $\angle OBC = \angle OCB = 4\alpha - (90^o - 6\alpha) = 10\alpha - 90^o$.
Maka $\angle CON = 90^o - (10\alpha - 90^o) = 180^o - 10\alpha$
$\angle MON = \angle AOC + \angle CON = (8\alpha) + (180^o - 10\alpha) = 180^o - 2\alpha$
Karena $\angle MON = 180^o - 2\alpha$ dan $\angle OMN = \alpha$ maka $\angle ONM = \alpha$
Maka $\triangle OMN$ sama kaki dengan OM = ON = $\frac{R}{2}$ dengan R adalah jari-jari lingkaran luar $\triangle ABC$.
Karena ON = $\frac{R}{2}$ maka $\angle OBC = 30^o = 10\alpha - 90^o$
$\alpha = 12^o$.
$\therefore$ Jadi, besarnya $\angle OMN$ sama dengan **12^o.**

15. Misalkan bilangan tersebut adalah 100a + 10b + c maka 100a + 10b + c = a! + b! + c!
Karena 0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720 dan 7! = 5040 maka jelas bahwa a, b, c $\leq$ 6.
Jika salah satu dari a, b dan c = 6 maka a! + b! + c! > 720 sedangkan 100a + 10b + c $\leq$ 666.
Maka a, b, c $\leq$ 5.
100a + 10b + c = a! + b! + c!
100a − a! = b! + c! − (10b + c)
Maksimum b! + c! − (10b + c) = 5! + 5! = 240
- Jika a = 5 maka 100a − a! = 380 > 240 (tidak memenuhi)
- Jika a = 4 maka 100a − a! = 376 > 240 (tidak memenuhi)
- Jika a = 3 maka 100a − a! = 294 > 240 (tidak memenuhi)
- Jika a = 2 maka 100a − a! = 198
  b! + c! − (10b + c) = 198
  Karena 4! + 4! = 48 < 198. Maka sedikitnya salah satu dari b atau c = 5
  Misalkan b = 5
  b! + c! − (10b + c) = 5! + c! − 50 − c
  198 = 70 + c! − c
  c! − c = 128. Tidak ada nilai c yang memenuhi.
  Jika c = 5
  b! + c! − (10b + c) = b! + 5! − 10b − 5
  198 = 115 + b! − 10b.
  b! − 10b = 83. Tidak ada nilai b yang memenuhi.
- Jika a = 1 maka 100a − a! = 99
  b! + c! − (10b + c) = 99
  99 − b! + 10b = c! − c
  Jika b = 0 maka c! − c = 98 (tidak ada nilai c memenuhi)
  Jika b = 1 maka c! − c = 108 (tidak ada nilai c memenuhi)
  Jika b = 2 maka c! − c = 117 (tidak ada nilai c memenuhi)
  Jika b = 3 maka c! − c = 123 (tidak ada nilai c memenuhi)
  Jika b = 4 maka c! − c = 115. Nilai c yang memenuhi adalah c = 5
  Jika b = 5 maka c! − c = 29 (tidak ada nilai c memenuhi)

Bilangan tersebut adalah 145.
$\therefore$ Jadi, semua bilangan yang memenuhi adalah **145**.

16. $S = \left\{x \in Z \middle| \frac{x^2-2x+7}{2x-1} \in Z\right\}$
(2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7) sehingga (2x − 1) ⏐ ($2x^2$ − 4x + 14) = (x(2x − 1) − 3x + 14)
Maka (2x − 1) ⏐ (−3x + 14) sehingga (2x − 1) ⏐ (−6x + 28) = −3(2x − 1) + 25
Akibatnya (2x − 1) ⏐ 25
- Jika 2x − 1 = −1
  x = 0 yang memenuhi (2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7)
- Jika 2x − 1 = 1
  x = 1 yang memenuhi (2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7)
- Jika 2x − 1 = −5
  x = −2 yang memenuhi (2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7)
- Jika 2x − 1 = 5
  x = 3 yang memenuhi (2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7)
- Jika 2x − 1 = −25
  x = −12 yang memenuhi (2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7)
- Jika 2x − 1 = 25
  x = 13 yang memenuhi (2x − 1) ⏐ (x^2 − 2x + 7)

Banyaknya nilai x ∈ Z yang memenuhi ada sebanyak 6.
∴ Jadi, banyaknya himpunan bagian dari S adalah $\mathbf{2^6}$.

17. Misalkan saja $a = x$ dan $b = \frac{1}{y}$ sehingga $a > 0$ dan $b > 0$
$f(x,y) = f(a,b) = \min(a, b, \frac{1}{2b} + \frac{2}{a})$
Jika $a = b = \frac{1}{2b} + \frac{2}{a}$
$a(2a) = 5$
$a = b = \frac{1}{2b} + \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- Jika $a \le \frac{\sqrt{10}}{2}$ atau $b \le \frac{\sqrt{10}}{2}$
  Maka $f(x,y) \le \frac{\sqrt{10}}{2}$
- Jika $a > \frac{\sqrt{10}}{2}$ dan $b > \frac{\sqrt{10}}{2}$
  Maka $f(x,y) = \frac{1}{2b} + \frac{2}{a} < \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Maka $f(x,y) \le \frac{\sqrt{10}}{2}$ dengan tanda kesamaan terjadi jika $a = b = \frac{\sqrt{10}}{2}$.
∴ Jadi, nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x,y)$ adalah $\mathbf{\frac{\sqrt{10}}{2}}$.

18. Misalkan A = {10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30}
B = {1, 4, 9, 16, 25}
C = {2, 8, 18}
D = {3, 12, 27}
E = {5, 20}
G = {6, 24}
H = {7, 28}
A adalah himpunan yang jika dikalikan salah satu anggotanya dengan anggota himpunan A maupun anggota himpunan lainnya maka tidak akan menghasilkan bilangan kuadrat.

Himpunan B, C, D, E, F, G dan H adalah himpunan yang jika salah satu anggotanya dikalikan dengan anggota dari himpunannya sendiri akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna.
Maka jika seluruh anggota A, digabungkan dengan masing-masing satu anggota dari himpunan B, C, D, E, F, G dan H maka tidak akan ada 2 anggota yang jika dikalikan akan menghasilkan bilangan kuadrat. Banyaknya anggota himpunan ini ada 13 + 6(1) = 19.
Tetapi jika satu anggota lagi dipilih dari himpunan manapun maka akan ada 2 anggota dari himpunan tersebut yang jika dikalikan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna.
∴ Jadi, nilai k terkecil yang memenuhi adalah **20**.

19. $x^2 + px + q + 1 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2.
$p = -(x_2 + x_2)$
$q = x_1x_2 - 1$
$p^2 + q^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$
Karena $p^2 + q^2$ maka salah satu x_1 atau x_2 sama dengan 0. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x_1 = 0$.
Maka $q = -1$
$p^2 + 1$ merupakan bilangan prima.
Jika p ganjil maka $p^2 + 1$ prima genap yang hanya dicapai jika $p = \pm 1$. Tetapi p juga harus prima. Maka tidak ada p ganjil yang memenuhi.
Jika p genap maka p = 2 yang memenuhi $p^2 + 1$ bilangan prima.
Maka $x_2 = -p = -2$
∴ Jadi, $x_1^{2013} + x_2^{2013} = \mathbf{-2^{2013}}$.

20. $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$
Jika x bulat maka $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ sehingga tidak mungkin $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.
Jika x tidak bulat maka $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$ yang dapat dicapai jika $\lceil x \rceil = 3$ dan $\lfloor x \rfloor = 2$.
Nilai x yang memenuhi hanya jika $2 < x < 3$.
∴ Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $\mathbf{2 < x < 3}$.