SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2009

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

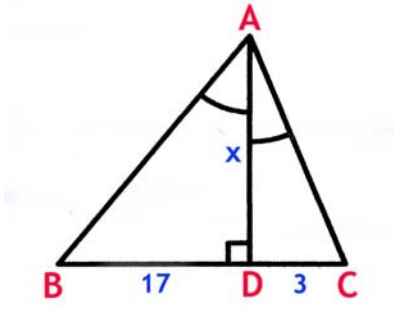
1. Banyaknya macam adalah (1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3) beserta permutasi yang berturut-turut ada sebanyak 3, 6, 6, 3 dan 3.
   $\therefore$ Banyaknya macam hasil lemparan = 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = **21**.

2. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$
   $(x^2 - x)^2 + (2x - 44)^2 + 73 = 0$
   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka tidak ada x real yang memenuhi.
   $\therefore$ Banyaknya bilangan real x yang memenuhi adalah **0**.

3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$
   Karena a, b dan c positif maka dengan ketaksamaan AM-GM didapat
   $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$
   Tanda kesamaan terjadi jika a = b = c.
   Karena $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ maka haruslah a = b = c yang kontradiksi dengan a < b < c.
   $\therefore$ Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah **0**.

4. $S = \left\{ n \in N \left| \frac{n^{2009} + 2}{n+1} \in N \right. \right\}$
   $\frac{n^{2009} + 2}{n+1} = \frac{n^{2009} + 1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \in N$
   Karena $n + 1 \mid n^{2009} + 1$ maka haruslah $n + 1 \mid 1$
   Jadi $n + 1 \le 1$, tetapi $n \in N$ sehingga tidak ada $n \in N$ yang memenuhi.
   Semua himpunan bagian dari S adalah { }.
   $\therefore$ Banyaknya himpunan bagian dari S adalah **1**.

5. Misalkan garis tinggi dari A memotong sisi BC di D dan AD = x.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan CD = 3 dan DB = 17.



$$\tan\angle CAB = \tan(\angle CAD + \angle DAB) = \frac{\tan\angle CAD + \tan\angle DAB}{1 - \tan\angle CAD \cdot \tan\angle DAB}$$

$\frac{22}{7} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{17}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot \frac{17}{x}}$ yang ekivalen dengan

$11x^2 - 561 = 70x$

$(x - 11)(11x + 51) = 0$

Karena x > 0 maka x = AD = 11

Luas ΔABC = ½ · AD · BC = ½ · 11 · (3 + 17)

∴ Luas ΔABC adalah **110**.

6. $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$

Untuk 0 < x < π maka sin x > 0

Dengan AM-GM didapat

$$f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} = 9x\sin x + \frac{4}{x\sin x} \geq 2\sqrt{9x\sin x \cdot \frac{4}{x\sin x}} = 12$$

Tanda kesamaan terjadi jika $9x\sin x = \frac{4}{x\sin x}$ atau $x\sin x = \frac{2}{3}$

∴ Nilai minimum dari $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ adalah **12**.

7. Misalkan garis tinggi ketiga = t.

Misalkan juga 6, 10 dan t adalah garis tinggi-garis tinggi yang berturut-turut sepadan dengan sisi-sisi a, b dan c.

Dengan rumus luas segitiga ABC didapat hubungan

6a = 10b = tc

a > b + c

Dengan ketaksamaan segitiga didapat

$1 > \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

$1 > \frac{3}{5} + \frac{6}{t}$

t < 15.

Jika t = 14 maka 6a = 10b = 14c

$a : b : c = \frac{1}{6} : \frac{1}{10} : \frac{1}{14} = 35 : 21 : 15$

Karena a = 35k < b + c = 36k untuk suatu nilai real k maka t = 14 memenuhi.

∴ Panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah **14.**

8. $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ dan f(2) = 2

$f(3) = \frac{1+2}{1-2} = -3$

$f(4) = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$

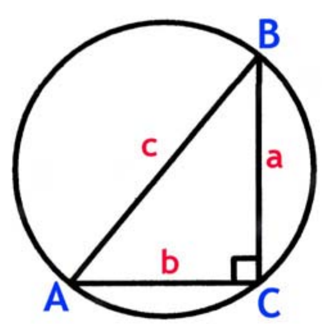
$f(5) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$f(6) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$

Sehingga nilai f(n) untuk n bulat ≥ 2 akan periodik dengan kala ulang 4.
Karena 2009 = 4(502) + 1 maka nilai f(2009) = f(5)

∴ Nilai fungsi f(2009) adalah $\frac{1}{3}$.

9.



$\frac{r(a+b+c)}{R^2} = \sqrt{3}$

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}ab = \frac{abc}{4R}$

$\frac{ab}{R^2} = \sqrt{3}$

Alternatif 1 :

Dengan mensubtitusikan bahwa c = 2R, a = c sin A dan b = c cos A maka

$4\sin A\cos A = \sqrt{3}$

$\sin 2A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Karena a < b < c maka A < B < C.

Jadi, A = 30^o, B = 60^o dan C = 90^o.

$$\frac{r}{a+b+c}=\frac{r(a+b+c)}{(a+b+c)^2}=\frac{ab}{(a+b+c)^2}=\frac{c\sin 30^\circ\cdot c\cos 30^\circ}{(c\sin 30^\circ+c\cos 30^\circ+c)^2}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3}+2)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{r}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

Alternatif 2 :

Karena R = 2c maka $4ab=c^2\sqrt{3}$

$a^2+b^2=c^2$

$$3a^2+3b^2=4ab\sqrt{3}$$

$$(a-b\sqrt{3})(3a-b\sqrt{3})=0$$

Karena a < b maka

$b=a\sqrt{3}$ dan $c=2a$

$$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a^2\sqrt{3}}{a+a\sqrt{3}+2a}=\frac{a\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\frac{r}{a+b+c}=\frac{a\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(a+a\sqrt{3}+2a)}=\frac{\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})^2}$$

$$\therefore\quad \frac{r}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

10. tan x + tan y = 25

cot x + cot y = 30

$$\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}=30$$

$$\frac{\tan x+\tan y}{\tan x\cdot\tan y}=30$$

tan x · tan y = $\frac{5}{6}$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}=\frac{25}{1-\frac{5}{6}}$$

∴ tan (x + y) = **150**.

11. Nilai maksimal k sehingga $5^k \mid 100!$ adalah $\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{100}{5^2}\right\rfloor$ = 24.

∴ Bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak **24**.

12. Alternatif 1 :

Akan ada dua kasus

1) Ada tepat sepasang sepatu yang berpasangan dan dua lainnya dipilih dari 3 pasang sepatu tersisa sehinga keduanya tidak berpasangan.
   Sepasang sepatu dipilih dari kemungkinan 4 pasangan. Banyaknya cara memilih ada 4.
   Banyaknya cara memilih dua sepatu dari tiga pasang sepatu sehingga keduanya tidak berpasangan adalah ${}_3C_2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.
   Banyaknya cara memilih sehingga tepat sepasang sepatu yang berpasangan dan 2 lainnya dipilih dari 3 pasang sepatu tersisa sehinga keduanya tidak berpasangan = $4 \cdot 12 = 48$.
2) Ada tepat dua pasang sepatu berpasangan yang dipilih dari kemungkinan empat pasang sepatu.
   Banyaknya cara memilih adalah ${}_4C_2 = 6$.

$\therefore$ Peluang kejadian = $\frac{48+6}{{}_8C_4} = \frac{27}{35}$

Alternatif 2 :

Komplemen dari kejadian dimaksud adalah tidak ada sepasang sepatu dari keempat sepatu tersebut yang berpasangan, sehingga masing-masing satu buah sepatu dipilih dari masing-masing empat pasang sepatu tersebut. Banyaknya cara adalah $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Peluang kejadian = $1 - \frac{16}{{}_8C_4}$

$\therefore$ Peluang kejadian = $\frac{27}{35}$.

13. $\frac{k}{m} + \frac{m}{4n} = \frac{1}{6}$ dengan k, m dan n adalah tiga bilangan bulat positif.

$3m^2 = 2n(m - 6k)$

Karena ruas kiri positif maka haruslah $m > 6k > 6$.

Ruas kanan pasti genap sehingga m harus genap.

Karena m genap dan $m > 6$ maka $m \geq 8$.

Jika $m = 8$ maka

$48 = 4n - 3kn$

$48 = n(4 - 3k)$

$n = 48$ dan $k = 1$ adalah salah satu pasangan (n, k) yang memenuhi.

$\therefore$ Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah **8**.

14. $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ untuk suatu bilangan prima p.

Jika $p = 2$ maka $3^3 + 6^2 \neq 6^2$ sehingga $p = 2$ tidak memenuhi.

Jika $p = 3$ maka $5^3 + 9^2 \neq 6^3$ sehingga $p = 3$ tidak memenuhi.

Karena $p \neq 2, 3$ dan p prima maka p dapat dinyatakan $p = 6k + 1$ atau $6k + 5$ dengan k bulat taknegatif.

- Jika $p = 6k + 1$
  Persamaan semula akan ekivalen dengan
  $(12k + 1)^3 + 9(6k + 1)^2 = 6^{6k+1}$
  $(12k)^3 + 3(12k)^2 + 3(12k)^2 + 1 + 9(6k + 1)^2 = 6^{6k+1}$
  Ruas kiri dibagi 9 bersisa 1 sedangkan ruas kanan habis dibagi 9.

Maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

- Jika p = 6k + 5
  Persamaan semula akan ekivalen dengan
  $(12k + 9)^3 + 9(6k + 5)^2 = 6^{6k-1}$
  $3^3(4k + 3)^3 + 324k^2 - 540k + 180 = 6^{6k+5}$
  Karena 180 ≡ 9 (mod 27) maka ruas kiri dibagi 27 bersisa 9 sedangkan 27 membagi ruas kanan.
  Maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jadi, tidak ada bilangan prima p yang memenuhi.

∴ Banyaknya bilangan prima p yang memenuhi adalah **0**.

15. Misalkan $k = \cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$ maka
$2k = 2 \cos x_1 \sin x_2 + 2 \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + 2 \cos x_{2009} \sin x_1$
Mengingat bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka
$2009+2k = \cos^2 x_1 + 2\cos x_1 \sin x_2 + (\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + 2\cos x_2 \sin x_3 + (\sin^2 x_3 + \cos^2 x_3) + \cdots + 2\cos x_{2009} \sin x_1 + \sin^2 x_1$
$2009+2k=(\cos^2 x_1 + 2\cos x_1 \sin x_2 + \sin^2 x_2)+(\cos^2 x_2 + 2\cos x_2 \sin x_3 + \sin^2 x_3)+\cdots+(\cos^2 x_{2009} + 2\cos x_{2009} \sin x_1 + \sin^2 x_1)$
$2009 + 2k =(\cos x_1 + \sin x_2)^2 + (\cos x_2 + \sin x_1)^2 + \cdots + (\cos x_{2009} + \sin x_1)^2 + (\cos x_1 + \sin x_{2009})^2$
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka
$2009 + 2k_{min} = 0$
$$k_{\min} = -\frac{2009}{2}$$
Nilai minimum didapat jika $\cos x_1 = -\sin x_2$, $\cos x_2 = -\sin x_1$, $\cos x_2 = -\sin x_3$, $\cos x_3 = -\sin x_2$, ⋯, $\cos x_{2009} = -\sin x_1$ dan $\cos x_{2009} = -\sin x_1$ yang dapat dipenuhi oleh $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2009} = \frac{3\pi}{4}$ rad.
∴ Nilai minimum dari $\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$ adalah $-\frac{2009}{2}$.

16. $x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0$ akar-akarnya a, b dan c.
Maka a + b + c = 8.
Subtitusi y = 8 − 2x sehingga $x = \frac{8-y}{2}$ ke persamaan $x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0$. Maka
$\left(\frac{8-y}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{8-y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{8-y}{2}\right) - 2 = 0$ memiliki akar-akar 8 − 2a, 8 − 2b dan 8 − 2c
Polinom $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ memiliki akar-akar, yaitu a + b − c = 8 − 2c, a + c − b = 8 − 2b dan b + c − a = 8 − 2a.
Karena koefisien x^3 dari f(x) sama dengan 1 maka
Polinom $f(x) = -8\left(\frac{8-x}{2}\right)^3 + 64\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 - 32\left(\frac{8-x}{2}\right) + 16 = 0$ juga memiliki akar-akar 8 − 2a, 8 − 2b dan 8 − 2c.
$$f(1) = -8\left(\frac{8-1}{2}\right)^3 + 64\left(\frac{8-1}{2}\right)^2 - 32\left(\frac{8-1}{2}\right) + 16 = 345$$
∴ f(1) = **345**.

17. Tanpa mengurangi keumuman misalkan sisi-sisi segitiga adalah a, b dan 10 dengan $a \le b \le 10$.
    Ketaksamaan segitiga, $a + b > 10$
    Karena segitiga tumpul maka $a^2 + b^2 < 10^2$
    Pasangan (a, b) bilangan asli yang memenuhi kedua ketaksamaan tersebut adalah (2,9), (3,8), (3,9), (4,7), (4,8), (4,9), (5,6), (5,7), (5,8), (6,6), (6,7) dan (7,7).
    Banyaknya pasangan (a, b) bilangan asli yang memenuhi ada 12.
    ∴ Banyaknya segitiga yang memenuhi adalah **12**.

18. $2009 = 7^2 \cdot 41$ maka 7^2 dan 41 haruslah merupakan faktor dari n.
    $n_{min} = 2^{40} \cdot 7^6 \cdot 41^6$ memenuhi banyaknya faktor positif dari n adalah $(40 + 1)(6 + 1)(6 + 1) = 2009$
    ∴ Faktor prima terkecil dari n adalah **2**.

19. $p(x) = x^2 - 6$
    $p(p(x)) = x$
    $(x^2 - 6)^2 - 6 = x$
    $x^4 - 12x^2 - x + 30 = 0$
    $(x + 2)(x - 3)(x^2 + x - 5) = 0$
    Nilai x yang memenuhi adalah -2, 3, $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.
    Karena $\left|\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{21}}{2} < \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$ maka nilai terbesar $|x|$ yang memenuhi adalah 3.
    ∴ Nilai maksimal dari $\{|x| : x \in A\}$ adalah **3**.

20. Karena $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ maka
    $q^2 = q + 1$
    $q - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
    $q^2n = nq + n$
    Karena n bulat maka
    $\lfloor q^2n \rfloor = \lfloor nq + n \rfloor = \lfloor qn \rfloor + n$ .... (1)
    $\lfloor q\lfloor qn \rfloor\rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor + \lfloor qn \rfloor\rfloor$
    Karena $\lfloor qn \rfloor$ bulat maka
    $\lfloor q\lfloor qn \rfloor\rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor\rfloor + \lfloor qn \rfloor$ .... (2)

$$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor\rfloor \ge \lfloor (q-1)(qn-1)\rfloor = \left\lfloor \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n - 1\right)\right\rfloor = \left\lfloor n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\rfloor = n-1$$

Karena q – 1 tak bulat maka

$$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor\rfloor < (q-1)\lfloor qn \rfloor < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n\right) = n$$

Karena $n > \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor \geq n - 1$ maka

$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor = n - 1$

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor + \lfloor qn \rfloor$

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor = n - 1 + \lfloor qn \rfloor$ .... (3)

Kurangkan persamaan (3) dengan persamaan (1)

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor = (n - 1 + \lfloor qn \rfloor) - (\lfloor qn \rfloor + n)$

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor = -1$

$\therefore$ Nilai $\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in N$ adalah **-1**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2009

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

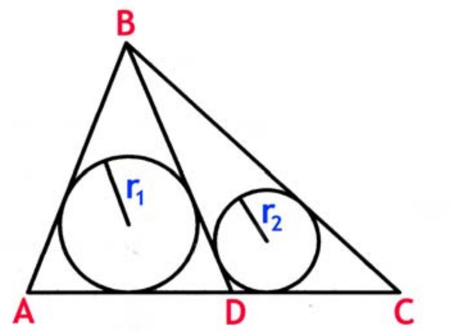
BAGIAN KEDUA

1. Jelas bahwa semut harus melangkah ke depan lebih dari 3 kali.
Jika semut melangkah ke depan lebih dari 5 kali maka semut tersebut harus mundur sekurang-kurangnya 8 langkah sehingga total langkah lebih dari 20. Jadi, hanya ada 2 kasus :
   - Semut tersebut maju 3 x 4 langkah dan mundur 2 langkah, total langkah 14.
   Banyaknya cara sama saja dengan banyaknya susunan 333311
   Banyaknya cara = $\frac{6!}{4! \cdot 2!}$ = 15 cara.
   Cara lainnya sama dengan menempatkan 4 angka tiga ke 4 dari 6 tempat. Banyaknya cara = ${}_6C_4$ = 15 cara.
   - Semut tersebut maju 3 x 5 langkah dan mundur 5 langkah, total langkah 20.
   Banyaknya cara sama saja dengan banyaknya susunan 3333311111
   Banyaknya cara = $\frac{10!}{5! \cdot 5!}$ = 252 cara.
   Cara lainnya sama dengan menempatkan 5 angka tiga ke 5 dari 10 tempat. Banyaknya cara = ${}_{10}C_5$ = 252 cara.

   $\therefore$ Banyaknya cara semut tersebut melangkah agar mencapai makanan adalah 15 + 252 = **267**

2. $x = 6 + 2009\sqrt{n}$
$\frac{x^{2009} - x}{x^3 - x} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan b ≠ 0.
Karena $\left(p_1 + q_1\sqrt{n}\right)\left(p_2 + q_2\sqrt{n}\right) = \left(p_1 p_2 + q_1 q_2 n\right) + \left(p_1 q_2 + p_2 q_2\right)\sqrt{n}$ yang juga berbentuk $p_i + q_i\sqrt{n}$ untuk suatu bilangan asli p_i dan q_i dengan i adalah bilangan asli maka x^i juga akan berbentuk $p_i + q_i\sqrt{n}$ untuk suatu bilangan asli i.
Karena x ≠ 0 maka $\frac{x^{2009} - x}{x^3 - x} = \frac{a}{b} = \frac{x^{2008} - 1}{x^2 - 1}$
$$\frac{p_{2008} + q_{2008}\sqrt{n} - 1}{p_2 + q_2\sqrt{n} - 1} = \frac{a}{b}$$
$$b \cdot p_{2008} - a \cdot p_2 + a - b = \left(a \cdot q_2 - b \cdot q_{2008}\right)\sqrt{n}$$
Karena a, b, p_2, p_{2008}, q_2 dam q_{2008} adalah bilangan bulat maka n haruslah merupakan kuadrat dari suatu bilangan rasional.
$n = \left(\frac{k}{m}\right)^2$ dengan k, m bilangan asli dan FPB(k, m) = 1
Karena n bilangan asli maka haruslah m = 1 sehingga n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.
$\therefore$ **Terbukti bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.**

3.



Misalkan [ABC] menyatakan luas ΔABC, maka [ABC] = [ABD] + [BCD]

$$\frac{1}{2}r\left(AB+BC+AC\right)=\frac{1}{2}r_1\left(AB+BD+AD\right)+\frac{1}{2}r_2\left(BC+BD+DC\right)$$

Pada ΔABD dan ΔBCD berturut-turut berlaku BD < AD + AB dan BD < BC + DC sehingga

$r(AB + BC + AC) = r_1(AB + BD + AD) + r_2(BC + BD + DC) < r_1(AB + BC + DC + AD) + r_2(BC + AD + AB + DC)$

Karena AD + DC = AC maka

$r(AB + BC + AC) < r_1(AB + BC + AC) + r_2(BC + AC + AB)$

$r < r_1 + r_2$

∴ **Terbukti bahwa $r_1 + r_2 > r$**

4. $7p = 8x^2 - 1$ .... (1)

$p^2 = 2y^2 - 1$ .... (2)

Jika (x, y) = (x_1, y_1) memenuhi persamaan maka $(-x_1, -y_1)$ pasti memenuhi sehingga tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan x, y ≥ 0.

$p^2 - y^2 = y^2 - 1$.

Karena y = 0 dan y = 1 tidak memenuhi persamaan maka $y^2 > 1$ sehingga p > y .... (3)

Jika p = 2 maka $15 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 3 maka $22 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 5 maka $36 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 7 maka $50 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jadi, p > 7.

Kurangkan persamaan (2) dengan (1) didapat

$p(p - 7) = 2(y + 2x)(y - 2x)$

Karena p > 7 maka y > 2x sehingga p > y > 2x .... (4)

Karena p ≠ 2 maka $p \mid (y + 2x)(y - 2x)$

Karena p > y ≥ y − 2x dan p bilangan prima maka $p \mid y + 2x$

Karena p ≤ y + 2x < p + p = 2p maka hanya terpenuhi jika p = y + 2x

Maka $p^2 = 2(p - 2x)^2 - 1$ sehingga $p^2 - 8xp + 8x^2 - 1 = 0$

Subtitusikan persamaan (1) sehingga $p^2 - 8xp + 7p = 0$

Karena p ≠ 0 maka p = 8x − 7 .... (5)

Subtitusikan persamaan (5) ke persamaan (1)

$7(8x - 7) = 8x^2 - 1$

$(x - 6)(x - 1) = 0$

* Jika x = 1 dan sesuai persamaan (5) maka p = 1 (tidak memenuhi bahwa p bilangan prima)

* Jika x = 6 maka p = 41 dan y = 29 yang memenuhi bahwa p bilangan prima dan y bulat

∴ Semua nilai p yang memenuhi adalah **p = 41.**

5. Misalkan A $\subset$ H dan B $\subset$ H yang memenuhi A $\cap$ B = { } serta A dan B keduanya bukan himpunan kosong.
   H = {0, 1, 2, 4, 8} merupakan *counter example* dari soal.
   Bagaimana pun disusun A $\subset$ H dan B $\subset$ H serta A $\cap$ B = { } tidak akan didapat jika semua anggota A dijumlahkan hasilnya akan sama dengan jumlah semua anggota B.
   $\therefore$ Tidak dapat dibuktikan ada dua himpunan bagian dari H, yang tidak kosong dan saling asing, yang jika semua anggotanya dijumlahkan hasilnya sama.