SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2010

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

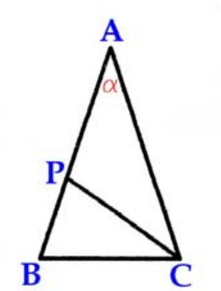
Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan $n^2 + n + 2010 = k^2$ untuk suatu bilangan asli k.
   $n^2 + n + 2010 - k^2 = 0$ yang merupakan persamaan kuadrat dalam n.
   Karena n bilangan bulat maka diskriminan persamaan tersebut harus merupakan bilangan kuadrat sempurna.
   $1^2 - 4(1)(2010 - k^2) = m^2$ untuk suatu bilangan asli m.
   $8039 = 4k^2 - m^2 = (2k + m)(2k - m)$
   Karena 8039 merupakan bilangan prima maka
   $2k + m = 8039$ dan $2k - m = 1$
   Maka $4k = 8040$ sehingga $k = 2010$ dan $m = 4019$
   Jadi $n^2 + n + 2010 = 2010^2$
   $(n - 2009)(n + 2010) = 0$
   $\therefore$ Jadi, bilangan asli n yang memenuhi adalah n = **2009**.

2. $x^4 \leq 8x^2 - 16$
   $(x^2 - 4)^2 \leq 0$
   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $x^2 - 4 = 0$
   Bilangan bulat x yang memenuhi adalah $x = 2$ atau $x = -2$.
   $\therefore$ Jadi, bilangan bulat x yang memenuhi ada sebanyak **2**.

3. $2x + 5y = 2010$ untuk pasangan bilangan asli (x, y)
   Karena 5y dan 2010 habis dibagi 5 maka x habis dibagi 5 sehingga $x = 5a$ dengan $a \in N$.
   Karena 2x dan 2010 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2 sehingga $y = 2b$ dengan $b \in N$.
   $10a + 10b = 2010$
   $a + b = 201$
   Karena $a, b \in N$ maka ada 200 pasangan (a, b) yang memenuhi sehingga ada 200 pasangan (x, y) yang memenuhi.
   $\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi ada sebanyak **200**.

4. Misalkan besarnya sudut A = α



   Karena AP = PC maka $\angle ACP = \alpha$ sehingga $\angle BPC = 2\alpha$.
   Karena PC = CB maka $\angle CBP = 2\alpha$ sehingga $\angle PCB = 180^\circ - 4\alpha$
   Karena AB = AC maka $\angle CBP = \angle ACB = \angle ACP + \angle PCB$
   $2\alpha = (\alpha) + (180^\circ - 4\alpha)$
   $\alpha = 36^\circ$
   $\therefore$ Jadi, besarnya sudut A adalah **36°**.

5. Misalkan M = $\underbrace{20102010...2010}_{\text{n buah 2010}}$ habis dibagi 99.
   Karena M habis dibagi 99 maka M habis dibagi 9 dan 11.
   Jumlah angka-angka M = 3n yang harus habis dibagi 9 sebab M habis dibagi 9.
   Selisih jumlah angka pada posisi genap dan posisi ganjil dari M sama dengan 3n yang harus habis dibagi 11 sebab M habis dibagi 11.
   Jadi, 3n habis dibagi 9 dan 11.
   Nilai terkecil n yang memenuhi adalah 33.
   ∴ Jadi, nilai terkecil n yang memenuhi adalah **33**.

6. Hanya ada 5 pertandingan yang berpengaruh sehingga tercapai hasil A bertemu G di final dan A menjadi juara yaitu A mengalahkan B, A mengalahkan pemenang C atau D, G mengalahkan H, G mengalahkan E atau F dan A mengalahkan G.
   Pada masing-masing pertandingan, peluang salah satu tim tertentu memenangkan pertandingan adalah $\frac{1}{2}$. Maka peluang A mengalahkan G di final adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
   ∴ Jadi, peluang A mengalahkan G di final adalah $\frac{1}{32}$.

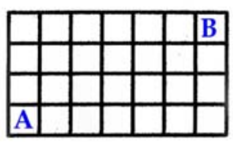
7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b dan c. Maka
   $a + b + c = 1$
   $ab + ac + bc = 1$
   $abc = 2$
   Alternatif 1 :
   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + ac + bc)(a + b + c) - 3abc$
   $1^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(1)(1) - 3(2)$
   $a^3 + b^3 + c^3 = 4$
   Alternatif 2 :
   Karena a, b, dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ maka
   $a^3 - a^2 + a - 2 = 0$
   $b^3 - b^2 + b - 2 = 0$
   $c^3 - c^2 + c - 2 = 0$
   Jumlahkan ketiga persamaan didapat
   $a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) - 6 = 0$
   $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) - (a + b + c) + 6$
   $a^3 + b^3 + c^3 = 1^2 - 2(1) - 1 + 6$
   $a^3 + b^3 + c^3 = 4$
   ∴ Jadi, nilai $a^3 + b^3 + c^3$ = **4.**

8. $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} + 1$
   Alternatif 1 :
   $\sqrt{2009} + 1$ merupakan solusi persamaan $x^2 + ax + b = 0$, maka
   $(\sqrt{2009} + 1)^2 + a(\sqrt{2009} + 1) + b = 0$

$2010 + 2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} + a + b = 0$
Karena a dan b bilangan bulat maka
$2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} = 0$ dan $2010 + a + b = 0$
Didapat a = –2 dan b = –2008
Maka a + b = –2010
Alternatif 2 :
$x^2 + ax + b = 0$
$x_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$
Maka $\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} = \sqrt{2009} + 1$
$-a + \sqrt{a^2 - 4b} = 2\sqrt{2009} + 2$
Karena a dan b bilangan bulat maka –a = 2 sehingga a = –2
$a^2 - 4b = 4 \cdot 2009$
1 – b = 2009 sehingga b = –2008
Maka a + b = –2 – 2008 = –2010.
∴ Jadi, a + b = –**2010**.

9. $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$
Jika H memiliki k elemen maka banyaknya himpunan bagian dari H adalah 2^k.
Elemen 1, 2, 3, ⋅⋅⋅, 1000 haruslah merupakan elemen dari X. Persoalannya sama saja dengan $X \subseteq \{1001, 1002, 1003, \cdots, 2010\}$
Banyaknya himpunan bagian dari X tersebut adalah 2^{1010}.
∴ Jadi, banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah $\mathbf{2^{1010}}$.

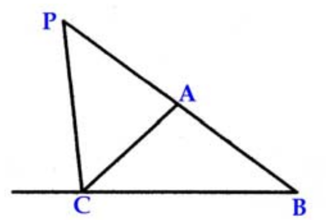
10. Jalan terpendek dari A ke B adalah jika jalannya hanya Kanan dan Atas saja. Ukuran grid 4 x 7.



Banyaknya langkah terpendek adalah 7 sebab banyaknya langkah ke Kanan ada 5 dan ke Atas ada 2. Tidak ada jalan dengan banyaknya langkah tepat 8 sebab jika berjalan ke Kiri atau ke Bawah sekali, maka banyaknya langkah terpendek yang diperlukan adalah 9.
Jadi cukup dihitung banyaknya jalan dengan banyaknya langkah tepat 7.
Alternatif 1 :
Misalkan langkah ke Kanan diberi tanda 1 dan langkah ke Atas diberi tanda 2. Maka persoalannya sama dengan banyaknya susunan angka-angka 1111122, yaitu melangkah ke Kanan sebanyak 5 kali dan melangkah ke Atas sebanyak 2 kali.
Banyaknya susunan bilangan 1111122 sama dengan $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$ = 21.
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan **21**.
Alternatif 2 :
Banyaknya langkah ada 7. Dua di antaranya adalah ke Atas dan 5 ke Kanan. Maka persoalan ini adalah sama dengan menempatkan 5 obyek identik pada 7 tempat berbeda.
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan $_7C_2$ = **21**.
∴ Jadi, banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan **21**.

Catatan : Ada perbedaan antara kata-kata pada soal dan gambar pada soal. Berdasarkan kata-kata pada soal maka ukuran gridnya adalah 4 x 8 sedangkan pada gambar ukuran gridnya adalah 4 x 7. Kunci jawaban dari pusat mengacu pada gambar. Jika yang diacu adalah kata-kata pada soal maka jawabannya adalah ${}_8C_2$ = 28.

11.



PC adalah garis bagi ΔABC sehingga berlaku

$\frac{CB}{AC} = \frac{PB}{PA}$

$\frac{4}{3} = \frac{PB}{PA}$

Maka dapat dimisalkan PB = 4k dan PA = 3k sehingga AB = k

Maka PA : AB = 3k : k = 3 : 1

$\therefore$ Jadi, perbandingan PA : AB adalah **3 : 1.**

12. $2010^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2$.

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

Faktor-faktor positif dari 2010^2 akan berbentuk $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 67^d$ dengan $0 \le a, b, c, d \le 2$ dengan a, b, c, d bilangan bulat.

Banyaknya faktor positif $2010^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Agar faktor tersebut merupakan kelipatan 2010 maka $1 \le a \le 2$, $1 \le b \le 2$, $1 \le c \le 2$, $1 \le d \le 2$.

Banyaknya faktor positif 2010^2 yang merupakan kelipatan $2010 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

$\therefore$ Jadi, peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah $\frac{16}{81}$

13. $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$

$(x - y)(x + 2y) = 30p$

Jika x dan y keduanya tidak memiliki sisa yang sama jika dibagi 3 maka x – y dan x + 2y keduanya tidak ada yang habis dibagi 3. Padahal 30p habis dibagi 3. Jadi, x dan y haruslah keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi 3.

Akibatnya x – y dan x + 2y masing-masing habis dibagi 3 sehingga 30p harus habis dibagi 9.

Karena 30 habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maka p harus habis dibagi 3.

Karena p adalah bilangan prima maka p = 3.

$(x - y)(x + 2y) = 90$

Karena $x + 2y \ge x - y$ maka akan ada 2 kasus.

* $x + 2y = 30$ dan $x - y = 3$

Didapat x = 12 dan y = 9

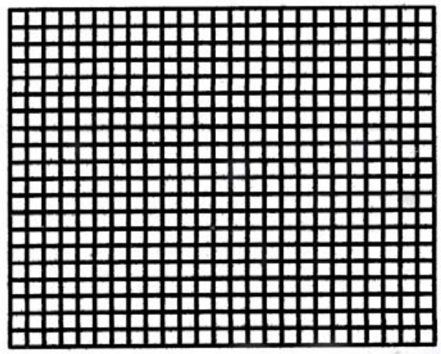
* $x + 2y = 15$ dan $x - y = 6$

Didapat x = 9 dan y = 3

Maka pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi adalah (12, 9) dan (9, 3).

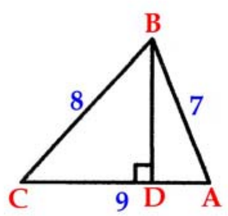
$\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak **2.**

14. Perhatikan gambar.



Banyaknya persegi dengan ukuran 1 x 1 ada sebanyak 25 x 20 = 500
Banyaknya persegi dengan ukuran 2 x 2 ada sebanyak 24 x 19 = 456
Banyaknya persegi dengan ukuran 3 x 3 ada sebanyak 23 x 18 = 414
⋮
Banyaknya persegi dengan ukuran 20 x 20 ada sebanyak 6 x 1 = 6
Banyaknya semua persegi yang ada = 500 + 456 + 414 + ··· + 6 = 3920.
∴ Jadi, banyaknya semua persegi yang ada = **3920**.

15. Perhatikan gambar.



Alternatif 1 :
s = $\frac{1}{2}$(a + b + c) = 12
Dengan rumus Heron didapat
[ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = $12\sqrt{5}$
$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 12\sqrt{5}$
$9 \cdot BD = 24\sqrt{5}$ sehingga BD = $\frac{8}{3}\sqrt{5}$
$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 49 - \frac{320}{9} = \frac{121}{9}$
AD = $\frac{11}{3}$

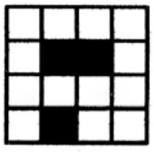
Alternatif 2 :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$8^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cos A$
$\cos A = \frac{11}{21}$
AD = AB cos A = $7 \cdot \frac{11}{21}$
AD = $\frac{11}{3}$
∴ Jadi, panjang AD = $\frac{11}{3}$

16. $P(x) = Q(x) \cdot (x + 2)(x - 1) - 5x + 2000$
    $P(-2) = 0 - 5(-2) + 2000 = 2010$
    $P(-2)$ menyatakan sisa jika $P(x)$ dibagi $x + 2$.
    $\therefore$ Jadi, sisa jika $P(x)$ dibagi $x + 2$ adalah **2010**.
    Catatan : Soal aslinya adalah $P(x)$ dibagi $x^2 - x - 2$ bersisa $-5x + 2000$, tetapi Penulis berkeyakinan seharusnya adalah $P(x)$ dibagi $x^2 + x - 2$ bersisa $-5x + 2000$.

17. Penyelesaian $\sqrt[n]{x^{x^2}} \le x^{\sqrt[n]{x^2}}$ dipenuhi oleh $\{x \mid 0 < x \le \sqrt[5]{216}\}$ untuk suatu bilangan asli n.
    $x^{\frac{x^2}{n}} \le x^{x^{\frac{2}{n}}}$
    - Jika $x \ge 1$ maka
      $\frac{x^2}{n} \le x^{\frac{2}{n}}$
      $x \le n^{\frac{n}{2n-2}}$
    - Jika $0 < x < 1$ maka
      $\frac{x^2}{n} \ge x^{\frac{2}{n}}$
      $x \ge n^{\frac{n}{2n-2}}$
      Karena n bilangan asli maka $n^{\frac{n}{2n-2}} \ge 1$.
    - Jika $x < 0$ maka karena $\frac{x^2}{n}$ dan $x^{\frac{2}{n}}$ tidak dapat dipastikan merupakan bilangan rasional maka tidak ada definisi jika $x < 0$.

    Maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $1 \le x \le n^{\frac{n}{2n-2}}$.
    Karena penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $0 < x \le \sqrt[5]{216} = 6^{\frac{3}{5}}$ maka
    $n = 6^k$ dan $\frac{n}{2n-2} = \frac{3}{5k}$ untuk suatu bilangan asli k.
    $6^k \cdot 5k = 6 \cdot 6^k - 6$
    $6^{1-k} = 6 - 5k$
    Jika $k > 1$ maka ruas kiri merupakan pecahan sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sehingga tidak akan tercapai kesamaan.
    Jika $k = 1$ maka $1 = 6 - 5(1)$ yang memenuhi persamaan.
    Jadi, $n = 6^1 = 6$
    $\therefore$ Jadi, nilai bilangan asli n yang memenuhi adalah **n = 6**.
    Catatan : Terbukti bahwa dalam batas $0 < x < 1$ tidak memenuhi ketaksamaan. Maka pada soal, himpunan penyelesaian ketaksamaan tersebut seharusnya $\{x \mid 1 \le x \le \sqrt[5]{216}\}$

18. Perhatikan gambar. Rotasi yang dimaksud adalah 90^o, 180^o dan 270^o sehingga jika sebuah petak berwarna hitam dirotasi akan timbul 3 petak lain yang berbeda dengan petak semula. Jadi, jika 3 petak berwarna hitam dirotasikan maka tidak akan ada hasilnya yang menempati ketiga petak semula.



Persoalan ini sama saja dengan banyaknya memilih 3 petak dari 16 petak yang ada = ${}_{16}C_3$ lalu hasilnya dapat dibagi ke dalam ${}_{16}C_4$: 4 kelompok dengan masing-masing kelompok merupakan rotasi dari petak-petak lainnya.

Maka banyaknya cara pewarnaan = $\frac{{}_{16}C_3}{4}$ = 140.

∴ Jadi, banyaknya cara pewarnaan = **140**.

19. sin α cos α = $\frac{1}{2}$ sin 2α

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$1 = 2^{2010}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right) \sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$

$1 = 2^{2009}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)$

$1 = 2^{2008}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \sin\left(\frac{x}{2^{2008}}\right)$

Sehingga didapat

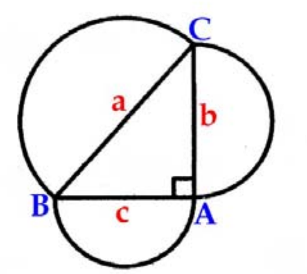
$1 = \sqrt{2}\sin x$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

Maka x = $\frac{\pi}{4}$ atau x = $\frac{3\pi}{4}$

∴ Jadi, nilai x yang memenuhi adalah **x = $\frac{\pi}{4}$ atau x = $\frac{3\pi}{4}$**

20. Perhatikan gambar.



Luas setengah lingkaran AB = $\frac{1}{8}\pi c^2$ = 396.

Luas setengah lingkaran AC = $\frac{1}{8}\pi b^2$ = 1100.

Luas setengah lingkaran BC = $\frac{1}{8}\pi a^2 = \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2)$ = 1100 + 396 = 1496.

∴ Jadi, luas setengah lingkaran pada sisi BC sama dengan **1496**.

Catatan : Kunci dari pusat terhadap persoalan ini adalah 704 yang menurut Penulis, kesalahannya ada pada segitiga ABC siku-siku di A yang mungkin seharusnya di B atau C.