Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Awal Kemerdekaan
UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1949

ILMU UKUR SUDUT DAN SEGITIGA (TRIGONOMETRI)

1. **HBS Negeri Belanda (Nederland) 1949**

   a. Dari ΔABC diketahui bahwa: $a\cos\alpha = b\cos\beta$. Segitiga apakah ini?

   b. Jika $\sin x - \cos x = p$, ditanyakan:

      1. Pada syarat-syarat apa p harus memenuhi.
      2. $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x}$ disebutkan dengan p.

   c. Hitunglah semua harga x yang lebih kecil dari pada $180°$ yang memenuhi persamaan $\cos 5x = \sin 4x - \cos x$.

   d. Jika untuk ΔABC berlaku $r + r_a + r_b = r_c$, segitiga apakah ini?

   Solusi:

   a. $a\cos\alpha = b\cos\beta$

   $2R\sin\alpha\cos\alpha = 2R\sin\beta\cos\beta$

   $2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\beta\cos\beta$

   $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$

   $\alpha = \beta$

   Jadi, segitiga ini adalah segitiga sama kaki.

   b. 1. $a\sin x + b\cos x = c$, dengan $c^2 \le a^2 + b^2$

   $\sin x - \cos x = p$

   $p^2 \le 1^2 + (-1)^2$

   $p^2 \le 2$

   $\left(p - \sqrt{2}\right)\left(p + \sqrt{2}\right) \le 0$

   $-\sqrt{2} \le p \le \sqrt{2}$

   2. $\sin x - \cos x = p$

   $\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = p^2$

   $1 - 2\sin x\cos x = p^2$

   $\sin x\cos x = \dfrac{1-p^2}{2}$

   $$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x\cos x} = \frac{p}{\frac{1-p^2}{2}} = \frac{2p}{1-p^2}, p \ne \pm 1$$

   c. $\cos 5x = \sin 4x - \cos x$

   $\cos 5x + \cos x - \sin 4x = 0$

   $2\cos 3x\cos 2x - 2\sin 2x\cos 2x = 0$

$\cos 2x(\cos 3x - \sin 2x) = 0$

$\cos 2x = 0$ atau $\sin 2x = \cos 3x$

$\cos 2x = \cos 90°$

$2x = \pm 90° + k \times 360°$

$x = \pm 45° + k \times 180°$

Jika $k = 0$, maka $x = 45°$

Jika $k = 1$, maka $x = -45° + 180° = 135°$

$\cos 3x = \sin 2x$

$2x = 90° - 3x + k \times 360°$ atau $2x = 180° - 90° + 3x + k \times 360°$

$x = 18° + k \times 72°$ atau $x = -90° - k \times 360°$

Jika $k = 0$, maka $x = 18°$

Jika $k = 1$, maka $x = 18° + 72° = 90°$

Jika $k = 2$, maka $x = 18° + 144° = 162°$

d. $r + r_a + r_b = r_c$

$$\frac{L}{s} + \frac{L}{s-a} + \frac{L}{s-b} = \frac{L}{s-c}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} = \frac{1}{s-c}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-c} = 0$$

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c) + s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) - s(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 0$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) + s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) - s(s-a)(s-b) = 0$$

$$(s-b)(s-c)(s-a+s) + s(s-a)(s-c-s+b) = 0$$

$$(s-b)(s-c)(2s-a) + s(s-a)(b-c) = 0$$

$$(s-b)(s-c)(a+b+c-a) + s(s-a)(b-c) = 0$$

$$(s-b)(s-c)(b+c) + s(s-a)(b-c) = 0$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)(b+c) + \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)(b-c) = 0$$

$$(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)(b+c) + (a+b+c)(a+b+c-2a)(b-c) = 0$$

$$(a-b+c)(a+b-c)(b+c) + (a+b+c)(-a+b+c)(b-c) = 0$$

$$[a-(b-c)][a+(b-c)](b+c) + [(b+c)+a][(b+c)-a](b-c) = 0$$

$$\left[a^2 - (b-c)^2\right](b+c) + \left[(b+c)^2 - a^2\right](b-c) = 0$$

$$\left[a^2 - (b-c)^2\right](b+c) - \left[a^2 - (b+c)^2\right](b-c) = 0$$

$$a^2b + a^2c - (b+c)(b-c)^2 - a^2b + a^2c + (b-c)(b+c)^2 = 0$$

$$2a^2c - (b+c)(b-c)^2 + (b-c)(b+c)^2 = 0$$

$$2a^2c + (b+c)(b-c)(b+c-b+c) = 0$$

$$2a^2c + \left(b^2 - c^2\right)(2c) = 0$$

$$2c\left(a^2+b^2-c^2\right)=0$$

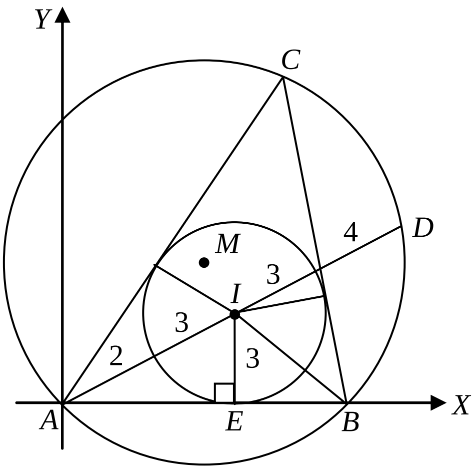
$$c=0\text{(ditolak) atau } a^2+b^2=c^2 \text{(diterima)}$$

Jadi, ΔABC adalah segitiga siku-siku, dengan $\angle C=90°$.

2. **HBS Negeri Belanda (Nederland) 1949**

Dalam sebuah ΔABC, M adalah titik pusat lingkaran luar dan r jari-jari lingkaran dalam. Perpanjangan AI memotong lingkaran luar di D. Jika $AI=5$, $r=3$, dan $BD=12$, hitunglah sudut-sudut dan sisi-sisi dari ΔABC tersebut.

Solusi:



$$AE=\sqrt{AI^2-IE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

$$\tan\frac{1}{2}\alpha=\frac{IE}{AE}=\frac{3}{4}=0,75\to\frac{1}{2}\alpha=36°52'\to\alpha=73°44'$$

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{AI}{\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{AB}{\sin\angle AIB}$$

$$\frac{5}{\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{c}{\sin\left[180°-\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\right]}$$

$$\frac{5}{\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{c}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)}$$

Belum selesai

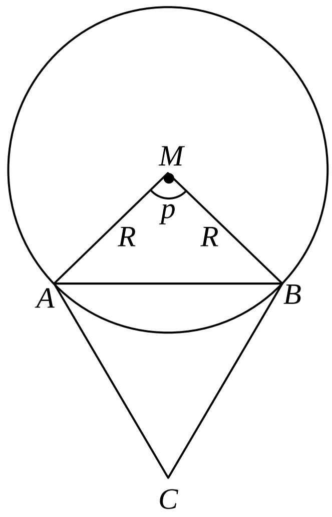
3. **HBS (Hogere Burger School) – AMS (Algemeene Middelbare School), 1949**

Dalam sebuah lingkaran dengan titik pusat M dan jari-jari R, ditarik dua jari-jari MA dan MB, sehingga $\angle AMB=p$. Pada AB dibuat sebuah ΔABC yang sama sisi begitu rupa sehingga C dan M terletak pada bagian yang berlainan dari AB.

a. Buktikan bahwa luas $MACB$ = $\frac{1}{2}R^2\left(\sin p-\sqrt{3}\cos p+\sqrt{3}\right)$.

b. Tentukan harga p jika luas $MACB$ mencapai harga maksimum.

Solusi:



a. $AB^2=R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos p$

$$AB^2=2R^2-2R^2\cos p$$

$$AB=R\sqrt{2-2\cos p}$$

Luas $MACB$ = luas ΔABC + luas ΔAMB

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(R\sqrt{2-2\cos p}\right)^2\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\sin p$$

$$=\frac{1}{2}\cdot R^2\left(2-2\cos p\right)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}R^2\sin p$$

$$=\frac{1}{2}R^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos p\right)+\frac{1}{2}R^2\sin p$$

$$=\frac{1}{2}R^2\left(\sin p-\sqrt{3}\cos p+\sqrt{3}\right)$$

b. Ambillah $y=\sin p-\sqrt{3}\cos p$, sehingga

$y=\sin p-\tan\varphi\cos p$, dengan $\tan\varphi=\sqrt{3}\to\varphi=60°$

$\cos\varphi y=\sin p\cos\varphi-\cos p\sin\varphi$

$$y=\frac{1}{\cos\varphi}\sin\left(p-\varphi\right)$$

$$y=\frac{1}{\cos 60°}\sin\left(p-60°\right)$$

$$y=2\sin\left(p-60°\right)$$

Dengan demikian, luas $MACB=\frac{1}{2}R^2\left[2\sin\left(p+60°\right)+\sqrt{3}\right]$ yang akan bernilai maksimum, jika $\sin\left(p-60°\right)=1$, sehingga $p=150°$.

4. **HBS (Hogere Burger School) – AMS (Algemeene Middelbare School), 1949**

Dari ΔABC diberikan $\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta-2\,\text{tg}\,\gamma=0$ .... (1)

a. Buktikan bahwa $\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta=3$.

b. Buktikan bahwa segitiga ini bersudut lancip.

c. Buktikanlah bahwa titik tinggi dari segitiga ini membagi garis tinggi dari *C* dalam dua bagian yang berbanding 2 : 1.

d. Hitunglah α dan β, jika selain dari pada (1) juga diberikan bahwa $\gamma=70°$.

e. Hitunglah α dan β, jika selain dari pada (1) juga diberikan bahwa γ mencapai harga minimum.

Solusi:

Dalam ΔABC belaku bahwa $\alpha+\beta+\gamma=180°$, sehingga kita akan membuktikan terlebih dahulu bahwa $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

Bukti:

$$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\begin{aligned}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma&=\tan\left(\alpha+\beta\right)\left(1-\tan\alpha\tan\beta\right)+\tan\gamma\\&=\tan\left(\alpha+\beta\right)-\tan\left(\alpha+\beta\right)\tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma\\&=\tan\left(180°-\gamma\right)-\tan\left(180°-\gamma\right)\tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma\\&=-\tan\gamma-\left(-\tan\gamma\right)\tan\alpha\tan\beta+\tan\gamma\\&=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\quad\text{(terbukti)}\end{aligned}$$

a. $\text{tg}\,\alpha+\text{tg}\,\beta-2\,\text{tg}\,\gamma=0$

$\tan\alpha+\tan\beta=2\tan\gamma$ .... (1)

$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh

$2\tan\gamma+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$3\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$\tan\alpha\tan\beta=3$ (terbukti)

b. $\tan\alpha\tan\beta=3$

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=3$$

$$\sin\alpha\sin\beta=3\cos\alpha\cos\beta$$

$$-(-2\sin\alpha\sin\beta)=3(2\cos\alpha\cos\beta)$$

$$-[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]=3[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=3\cos(\alpha+\beta)+3\cos(\alpha-\beta)$$

$$-2\cos(\alpha-\beta)=4\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=-2\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=-2\cos(180^\circ-\gamma)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=2\cos\gamma$$

Dalam kasus ini, sudut γ harus lancip, yang nilai minimunya $\gamma=60^\circ$, sehingga

$$\cos(\alpha-\beta)=2\cos 60^\circ=1$$

$$\alpha-\beta=0$$

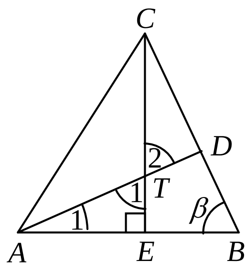
$$\alpha=\beta=60^\circ$$

Dengan demikian, jelaslah bahwa ΔABC adalah segitiga lancip.

c. Pada ΔATE diperoleh $\angle T_1=90^\circ-\angle A_1$ .... (1)

Pada ΔABD diperoleh $\angle B=90^\circ-\angle A_1$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $\angle T_1=\angle B=\beta$.



Pada ΔACE diperoleh $\cos\alpha=\frac{AE}{b}\Leftrightarrow AE=b\cos\alpha$ .... (3)

Pada ΔATE diperoleh $\cot\angle T_1=\frac{TE}{AE}$

$$TE=AE\cot\angle T_1=b\cos\alpha\cot\beta$$

$$TE=2R\sin\beta\cos\alpha\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=2R\cos\alpha\cos\beta \text{ .... (4)}$$

Pada ΔCTD diperoleh $\sin\angle T_2=\frac{CD}{CT}$, sehingga

$$CT=\frac{CD}{\sin\angle T_2}=\frac{b\cos\gamma}{\sin\beta}=\frac{2R\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta}=2R\cos\gamma \text{ .... (5)}$$

Akhirnya $\frac{CT}{TE}=\frac{2R\cos\gamma}{2R\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos[180^\circ-(\alpha+\beta)]}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$$=\frac{-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-1+\tan\alpha\tan\beta=-1+3=2=\frac{2}{1} \text{ (qed)}$$

d. $\operatorname{tg}\gamma=70^\circ\to\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\gamma=0$

$$\tan\alpha+\tan\beta=2\tan 70^\circ \text{ .... (1)}$$

$$\tan\alpha\tan\beta=3$$

$$\tan\beta=\frac{3}{\tan\alpha} \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\tan\alpha + \frac{3}{\tan\alpha} = 2\tan 70°$$

$$\tan^2\alpha - 2\tan 70° \tan\alpha + 3 = 0$$

$$\tan^2\alpha - 5{,}4950\tan\alpha + 3 = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{5{,}4950 \pm \sqrt{(5{,}4950)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{5{,}4950 \pm \sqrt{18{,}1950}}{2} = \frac{5{,}4950 \pm 4{,}2656}{2}$$

Karena α lancip, maka $\tan\alpha = \frac{5{,}4950 + 4{,}2656}{2} = 4{,}8803$, sehingga $\alpha = 78{,}42°$ dan $\beta = 180° - (78{,}42° + 70°) = 31{,}58°$.

e. $\tan\alpha\tan\beta = 3$

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 3$$

$$\sin\alpha\sin\beta = 3\cos\alpha\cos\beta$$

$$-(-2\sin\alpha\sin\beta) = 3(2\cos\alpha\cos\beta)$$

$$-[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)] = 3[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 3\cos(\alpha+\beta) + 3\cos(\alpha-\beta)$$

$$-2\cos(\alpha-\beta) = 4\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = -2\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = -2\cos(180° - \gamma)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\gamma$$

Dalam kasus ini, sudut γ harus lancip, yang nilai minimunya $\gamma = 60°$, sehingga

$$\cos(\alpha-\beta) = 2\cos 60° = 1$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = \beta = 60°$$

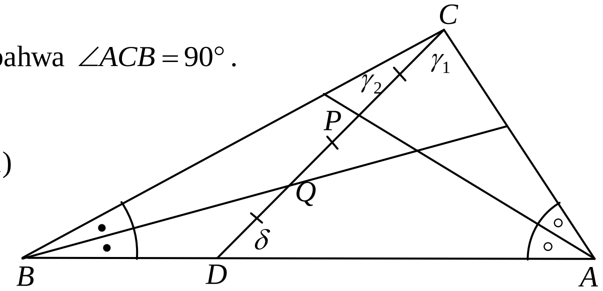
5. **Gymnasium Negeri Belanda (Nederland), 1949**

Dalam ΔABC sebuah titik *D* terletak pada garis alas *AB*. Garis bagi dari $\angle A$ memotong *CD* di *P*, garis bagi dari $\angle B$ memotong *CD* di *Q*. *P* terletak lebih dekat ke *C* daripada *Q*. Diketahui bahwa $CP = PQ = QD$, $\angle ACD = \gamma_1$, $\angle BCD = \gamma_2$, dan $\angle ADC = \delta$.

a. Buktikan bahwa $\sin\gamma_1 = 2\sin\delta$.

b. Buktikan bahwa $\sin\gamma_1 = 4\sin\gamma_2$.

c. Hitunglah α dan β, jika juga diketahui bahwa $\angle ACB = 90°$.



Solusi:

a. $\dfrac{CP}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{AP}{\sin\gamma_1} \rightarrow AP = \dfrac{CP\sin\gamma_1}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ .... (1)

$$\frac{DP}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{AP}{\sin\delta}\to AP=\frac{DP\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{CP\sin\gamma_1}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{DP\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$CP\sin\gamma_1=DP\sin\delta$$

$$CP\sin\gamma_1=2CP\sin\delta$$

$$\sin\gamma_1=2\sin\delta \quad \text{(qed)}$$

b. $$\frac{BQ}{\sin\gamma_2}=\frac{CQ}{\sin\frac{1}{2}\beta}\to BQ=\frac{CQ\sin\gamma_2}{\sin\frac{1}{2}\beta}\text{ .... (1)}$$

$$\frac{BQ}{\sin(180^\circ-\delta)}=\frac{DQ}{\sin\frac{1}{2}\beta}\to BQ=\frac{DQ\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$CQ\sin\gamma_2=DQ\sin\delta$$

$$2DQ\sin\gamma_2=DQ\sin\delta$$

$$2\sin\gamma_2=\sin\delta$$

Kita mengetahui bahwa $\sin\gamma_1=2\sin\delta$, sehingga

$$2\sin\gamma_2=\frac{1}{2}\sin\gamma_1$$

$$\sin\gamma_1=4\sin\gamma_2 \quad \text{(terbukti)}$$

c. $$\sin\gamma_1=4\sin\gamma_2$$

$$\sin\gamma_1=4\sin(90^\circ-\gamma_1)$$

$$\sin\gamma_1=4\cos\gamma_1$$

$$\tan\gamma_1=4$$

$$\sin\gamma_1=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin\gamma_1=4\sin\gamma_2\to \sin\gamma_2=\frac{1}{4}\sin\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{17}}=0,2425\to\gamma_2=14,03^\circ$$

$$\sin\delta=\frac{1}{2}\sin\gamma_1=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{2}{\sqrt{17}}=0,4851\to\delta\approx 29,02^\circ$$

$$\beta=180^\circ-(\gamma_2+180^\circ-\delta)=\delta-\gamma_2=29,02^\circ-14,03^\circ=14,99^\circ$$

$$\alpha=90^\circ-\beta=90^\circ-14,99^\circ=75,01^\circ$$