Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Awal Kemerdekaan
UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1947

ILMU UKUR SUDUT DAN SEGITIGA (TRIGONOMETRI)

1. **HBS Negeri Belanda (Nederland) 1947**
   Dari sebuah ΔABC diberikan $h_a = s - a$. Buktikanlah

   a. $\cos\frac{1}{2}\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$

   b. $\text{tg}\frac{1}{2}\beta + \text{tg}\frac{1}{2}\gamma = 2$

   c. $\sin\frac{1}{2}\alpha = -2\sin\left(45° - \frac{1}{2}\beta\right)\sin\left(45° - \frac{1}{2}\gamma\right)$

   d. β atau γ adalah sudut tumpul

   Bukti:

   a. $h_a = s - a$

   $$c\sin\beta = \frac{r}{\tan\frac{1}{2}\alpha}$$

   $$c\sin\beta\tan\frac{1}{2}\alpha = r$$

   $$c\sin\beta\tan\frac{1}{2}\alpha = 4R\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$$

   $$2R\sin\gamma\sin\beta\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = 4R\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$$

   $$\sin\gamma\sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$$

   $$\sin\gamma\sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$$

   $$4\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma$$

   $$\cos\frac{1}{2}\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma \quad \text{(qed)}$$

   b. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

   $$\frac{1}{2}\alpha = 90° - \left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right)$$

   $$\cos\frac{1}{2}\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$\cos\frac{1}{2}\left[90^\circ-\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\right]=2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)=2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma=2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$\tan\frac{1}{2}\beta+\tan\frac{1}{2}\gamma=2 \text{ (qed)}$$

c. $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$$\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$$

$$\tan\frac{1}{2}\beta+\tan\frac{1}{2}\gamma=2$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta}+\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma}=2$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma+\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}=2$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)=2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)=\cos\left(90^\circ-\frac{1}{2}\alpha\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)=\sin\frac{1}{2}\alpha+\cos\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=\cos\left[90^\circ-\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)\right]-\cos\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=-2\sin\frac{1}{2}\left[90^\circ-\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)+\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)\right]\sin\frac{1}{2}\left[90^\circ-\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)-\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)\right]$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha=-2\sin\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\sin\left(45^\circ-\frac{1}{2}\gamma\right) \quad \text{(qed)}$$

d. Karena $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ dan $\sin\frac{1}{2}\alpha=-2\sin\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\sin\left(45^\circ-\frac{1}{2}\gamma\right)$, maka haruslah β atau γ adalah sudut tumpul, sehingga $\sin\frac{1}{2}\alpha$ bernilai positif.

2. **HBS Negeri Belanda (Nederland) 1947**

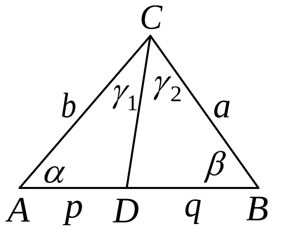
Pada garis alas AB dari ΔABC terletak sebuah titik D sehingga $AD:DB=p:q$, $\angle ACD=\gamma_1$, dan $\angle DCB=\gamma_2$.

a. Buktikanlah: $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{p\sin\alpha}{q\sin\beta}$.

b. Jika R_1 dan R_2 berturut-turut jari-jari lingkaran luar dari ΔACD dan ΔBCD, buktikanlah bahwa $R_1:R_2$ tidak bergantung pada letaknya *D* pada *AB*. Hitunglah sudut-sudut γ_1 dan γ_2, jika $p:q=1:2$, $\alpha=70°$, dan $\beta=36°$.

Solusi:

a. Menurut Aturan Sinus:



$$\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{p}{\sin\gamma_1}$$

$$CD=\frac{p\sin\alpha}{\sin\gamma_1} \text{ .... (1)}$$

$$\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{q}{\sin\gamma_2}$$

$$CD=\frac{q\sin\beta}{\sin\gamma_2} \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\frac{p\sin\alpha}{\sin\gamma_1}=\frac{q\sin\beta}{\sin\gamma_2}$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{p\sin\alpha}{q\sin\beta} \text{ (qed)}$$

b. Menurut Aturan Sinus:

Pada ΔACD: $\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\angle ADC}=\frac{p}{\sin\gamma_1}=2R_1$

$CD=2R_1\sin\alpha$ .... (1)

Pada ΔBCD: $\frac{CD}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\angle BDC}=\frac{q}{\sin\gamma_2}=2R_2$

$CD=2R_2\sin\beta$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$2R_1\sin\alpha=2R_2\sin\beta$$

$$R_1:R_2=\sin\beta:\sin\alpha$$

Dari persamaan terakhir terlihat bahwa $R_1:R_2$ tidak bergantung pada letaknya *D* pada *AB*. (qed)

c. Hitunglah sudut-sudut γ_1 dan γ_2, jika $p:q=1:2$, $\alpha=70°$, dan $\beta=36°$.

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{p\sin\alpha}{q\sin\beta}$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\sin 70°}{2\sin 36°}=0,7994$$

$$\sin\left(74°-\gamma_2\right)=0,7994\sin\gamma_2$$

$$\sin 74°\cos\gamma_2-\cos 74°\sin\gamma_2=0,7994\sin\gamma_2$$

$$0,9613\cos\gamma_2-0,2756\sin\gamma_2=0,7994\sin\gamma_2$$

$$0,9613\cos\gamma_2=1,075\sin\gamma_2$$

$$\tan\gamma_2 = \frac{0{,}9613}{1{,}075} = 0{,}8942$$

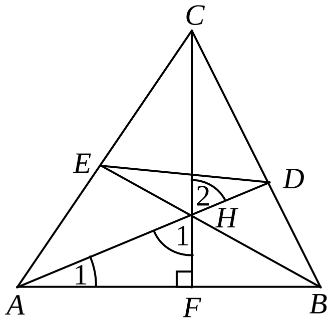
$\gamma_2 = 41°48'$

$\gamma_1 = 74° - 41°48' = 32°12'$

3. **Gymnassium Negeri Belanda, 1947**

Dalam sebuah ΔABC yang bersudut lancip AD dan BE adalah dua garis tinggi yang saling bertemu di H. Hitunglah sudut-sudut dari segitiga tersebut, jika diketahui bahwa $CH = 2\times DE$ dan $\cos 2\alpha\cos 2\beta = \frac{3}{4}$.

Solusi:



Pada ΔAHF diperoleh $\angle H_1 = 90° - \angle A_1$ .... (1)

Pada ΔABD diperoleh $\angle B = 90° - \angle A_1$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $\angle H_1 = \angle B = \beta$.

Pada ΔACF diperoleh $\cos\alpha = \frac{AE}{b} \Leftrightarrow AE = b\cos\alpha$ .... (3)

Pada ΔCHD diperoleh $\sin\angle H_2 = \frac{CD}{CH}$, sehingga

$$CH = \frac{CD}{\sin\angle H_2} = \frac{b\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{2R\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta} = 2R\cos\gamma \text{ .... (5)}$$

Pada ΔBHE diperoleh $\angle BHF = 90° - \angle FBH$ .... (6)

Pada ΔBAE diperoleh $\angle BAE = 90° - \angle FBH$ .... (7)

Dari persamaan (6) dan (7) diperoleh $\angle BHF = \angle BAF = \alpha$.

$$\sin\angle H_2 = \frac{CD}{CH} \to CD = CH\sin\angle H_2 = 2R\cos\gamma\sin\beta = b\cos\gamma \text{ .... (8)}$$

$$\sin\angle EHC = \frac{CE}{CH} \to CE = CH\sin\angle EHC = 2R\cos\gamma\sin\alpha = a\cos\gamma \text{ .... (9)}$$

Menurut Aturan Kosinus pada ΔCED:

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2CE\cdot CD\cos\gamma$$

$$DE^2 = (a\cos\gamma)^2 + (a\cos\gamma)^2 - 2(a\cos\gamma)(a\cos\gamma)\cos\gamma$$

$$DE = \cos\gamma\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \cos\gamma\sqrt{c^2} = c\cos\gamma$$

Diketahui bahwa $CH = 2\times DE$, sehingga

$$CH = 2\times DE$$

$$2R\cos\gamma = 2c\cos\gamma$$

$$R = c = 2R\sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{1}{2} \to \gamma = 30° \vee \gamma = 150°$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 180°$$

$$2\alpha + 2\beta = 360° - 2\gamma$$

$$\cos 2\alpha\cos 2\beta = \frac{3}{4}$$

$$2\cos 2\alpha\cos 2\beta = \frac{3}{2}$$

$$\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)=\frac{3}{2}$$

$$\cos(360°-2\gamma)+\cos(2\alpha-2\beta)=\frac{3}{2}$$

$$\cos 2\gamma+\cos(2\alpha-2\beta)=\frac{3}{2}$$

$$\cos(2\alpha-2\beta)=\frac{3}{2}-\cos 2\gamma$$

$$\gamma=30° \to \cos(2\alpha-2\beta)=\frac{3}{2}-\cos 2\cdot 30°=\frac{3}{2}-\cos 60°=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

$$2\alpha-2\beta=0$$

$$\alpha=\beta=75°$$

$$\gamma=150° \to \cos(2\alpha-2\beta)=\frac{3}{2}-\cos 2\cdot 150°=\frac{3}{2}-\cos 300°=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$$

$$2\alpha-2\beta=0$$

$$\alpha=\beta=15°$$