Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1938

ALJABAR

1. **AMS (Algemeene Middelbare School) 1938**

Persamaan: ${}^2\log^2 x-(a+1)\,{}^2\log x+2=0$

${}^2\log^2 x+(a+3)\,{}^2\log x-6=0$

Mempunyai satu akar berserikat. Hitunglah a dan akar-akar persamaan itu.

Solusi:

Persamaan kedua dikurangi persamaan pertama menghasilkan:

$(2a+4)\,{}^2\log x-8=0$

${}^2\log x=\frac{8}{2a+4}=\frac{4}{a+2}$

${}^2\log x=\frac{4}{a+2}\to {}^2\log^2 x-(a+1)\,{}^2\log x+2=0$

$\left(\frac{4}{a+2}\right)^2-(a+1)\left(\frac{4}{a+2}\right)+2=0$

$\left(\frac{4}{a+2}\right)^2-(a+1)\left(\frac{4}{a+2}\right)+2=0$

$16-4(a+1)(a+2)+2(a+2)^2=0$

$8-2\left(a^2+3a+2\right)+a^2+4a+4=0$

$-a^2-2a+8=0$

$a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$

$a=-4$ atau $a=2$

Jika $a=-4$, maka ${}^2\log^2 x-(a+1)\,{}^2\log x+2=0$ menjadi

${}^2\log^2 x+3\,{}^2\log x+2=0$

$\left({}^2\log x+1\right)\left({}^2\log x+2\right)=0$

${}^2\log x=-1$ atau ${}^2\log x=-2$

$x=\frac{1}{2}$ atau $x=\frac{1}{4}$

Jika $a=-4$, maka ${}^2\log^2 x+(a+3)\,{}^2\log x-6=0$ menjadi

${}^2\log^2 x-{}^2\log x-6=0$

$\left({}^2\log x-3\right)\left({}^2\log x+2\right)=0$

${}^2\log x=3$ atau ${}^2\log x=-2$

$x = 8$ atau $x = \frac{1}{4}$

Jika $a = 2$, maka ${}^2\log^2 x - (a+1)\,{}^2\log x + 2 = 0$ menjadi

${}^2\log^2 x - 3\,{}^2\log x + 2 = 0$

$\left({}^2\log x - 1\right)\left({}^2\log x - 2\right) = 0$

${}^2\log x = 1$ atau ${}^2\log x = 2$

$x = 2$ atau $x = 4$

Jika $a = 2$, maka ${}^2\log^2 x + (a+3)\,{}^2\log x - 6 = 0$ menjadi

${}^2\log^2 x + 5\,{}^2\log x - 6 = 0$

$\left({}^2\log x + 6\right)\left({}^2\log x - 1\right) = 0$

${}^2\log x = -6$ atau ${}^2\log x = -1$

$x = \frac{1}{64}$ atau $x = \frac{1}{2}$

Jadi, nilai a adalah -4 atau 2 dan akar-akarnya adalah $\frac{1}{64}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8$.

2. **HBS (Hogere Burger School) VB dan AMS (Algemeene Middelbare School) B, 1938**

Persamaan:

${}^2\log^2 x - (a+1)\,{}^2\log x + 2 = 0$ .... (1) dan

${}^2\log^2 x + (a+3)\,{}^2\log x - 6 = 0$ .... (2)

Mempunyai sebuah akar persekutuan. Tentukan a dan semua akar-akar persamaan itu.

Solusi:

Ambillah sebuah akar persekutuan tersebut adalah x_1.

${}^2\log^2 x_1 - (a+1)\,{}^2\log x_1 + 2 = 0$ .... (3)

${}^2\log^2 x_1 + (a+3)\,{}^2\log x_1 - 6 = 0$ .... (4)

Persamaan (3) – Persamaan (4) menghasilkan:

$(-2a-4)\,{}^2\log x_1 + 8 = 0$

${}^2\log x_1 = \frac{-8}{-2a-4} = \frac{4}{a+2}$

Selanjutnya, substitusikan $\frac{4}{a+2}$ ke persamaan (3) sehingga diperoleh

$\left(\frac{4}{a+2}\right)^2 - (a+1)\left(\frac{4}{a+2}\right) + 2 = 0$

$16 - 4(a+1)(a+2) + 2(a+2)^2 = 0$

$16 - 4a^2 - 12a - 8 + 2a^2 + 8a + 8 = 0$

$2a^2 + 4a - 16 = 0$

$a^2 + 2a - 8 = 0$

$(a+4)(a-2) = 0$

$a = -4 \vee a = 2$

Substitusikan $a = -4$ ke persamaan (1) dan (2), sehingga diperoleh:

$$^2\log^2 x + 3\,^2\log x + 2 = 0$$
$$\left(^2\log x + 1\right)\left(^2\log x + 2\right) = 0$$
$$^2\log x = -1 \vee {}^2\log x = -2$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{1}{4}$$
$$^2\log^2 x - {}^2\log x - 6 = 0$$
$$\left(^2\log x + 2\right)\left(^2\log x - 3\right) = 0$$
$$^2\log x = -2 \vee {}^2\log x = 3$$
$$x_3 = x_1 = \frac{1}{2} \vee x_4 = 8$$

Substitusikan $a = 2$ ke persamaan (1) dan (2), sehingga diperoleh:

$$^2\log^2 x - 3\,^2\log x + 2 = 0$$
$$\left(^2\log x - 1\right)\left(^2\log x - 2\right) = 0$$
$$^2\log x = 1 \vee {}^2\log x = 2$$
$$x_5 = 2 \vee x_6 = 4$$
$$^2\log^2 x + 5\,^2\log x - 6 = 0$$
$$\left(^2\log x + 6\right)\left(^2\log x - 1\right) = 0$$
$$^2\log x = -6 \vee {}^2\log x = 1$$
$$x_7 = \frac{1}{64} \vee x_4 = x_5 = 2$$

3. **HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1938**

Diketahui

$u = x + y - z$

$v = 2x^2 - 9x + 2y - 3z$

$w = x^2 - x + 2y - 2z$

a. Hitunglah *x*, *y*, dan *z*, kalau $u = 0$, $v = -15$, dan $w = -2$.

b. Kalau *x*, *y*, dan *z* memenuhi kepada persamaan-persamaan $u = 0$ dan $v = -15$ sekalipun mereka dalam pada ini umumnya variabel, maka berapakah harga tertinggi (extreem) yang dapat dicapai oleh w. Apakah sifatnya extreem ini (max atau min) dan untuk *x*, *y*, dan *z* berapa ia tercapai?

c. Kalau $y = -7\frac{1}{2}$ dan $z = -8$, maka $^w\log v$ adalah suatu fungsi dalam *x*. Hitunglah dalam 4 decimaal harganya pada $x = -1$. Untuk *x* berharga berapa, fungsi ini menjadi positif?

Solusi:

a. $u = 0 \rightarrow x + y - z = 0$ .... (1)

$v = -15 \rightarrow 2x^2 - 9x + 2y - 3z = -15$ .... (2)

$w = -2 \rightarrow x^2 - x + 2y - 2z = -2$ .... (3)

Persamaan (3) – 2 × Persamaan (1) menghasilkan

$x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 1 \vee x_2 = 2$

Persamaan (2) – Persamaan (3) menghasilkan $x^2 - 8x - z = -13$.

$x_1 = 1 \to x^2 - 8x - z = -13$

$1^2 - 8 \cdot 1 - z = -13$

$z_1 = 6$

$x_2 = 2 \to x^2 - 8x - z = -13$

$2^2 - 8 \cdot 2 - z = -13$

$z_2 = 1$

Selanjutnya, substitusikan $x_1 = 1, z_1 = 6$ dan $x_2 = 2, z_2 = 1$ ke persamaan (1), sehingga

$x_1 = 1, z_1 = 6 \to x + y - z = 0$

$1 + y - 6 = 0$

$y_1 = 5$

$x_2 = 2, z_2 = 1 \to x + y - z = 0$

$2 + y - 1 = 0$

$y_2 = -1$

b. $u = 0 \to x + y - z = 0$ .... (1)

$v = -15 \to 2x^2 - 9x + 2y - 3z = -15$ .... (2)

$w = x^2 - x + 2y - 2z$ .... (3)

Persamaan (3) – 2 × Persamaan (1) menghasilkan:

$w = x^2 - 3x$

Fungsi w mencapai minimum untuk $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$ dengan nilai minimumnya sebesar

$y_{\min} = \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{-4 \cdot 1} = -\frac{9}{4}$.

Persamaan (2) – 2 × Persamaan (1) menghasilkan: $2x^2 - 11x - z = -15$.

$x = \frac{3}{2} \to 2x^2 - 11x - z = -15$

$2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 11\left(\frac{3}{2}\right) - z = -15$

$18 - 66 - 4z = -60$

$4z = 12$

$z = 3$

Substitusikan $x = \frac{3}{2}$ dan $z = 3$ ke persamaan (1) sehingga diperoleh

$\frac{3}{2} + y - 3 = 0$

$y = \frac{3}{2}$

c. Substitusikan $y=-7\frac{1}{2}$ dan $z=-8$ ke persamaan $v=2x^2-9x+2y-3z$ dan $w=x^2-x+2y-2z$ sehingga

$$v=2x^2-9x+2\left(-7\frac{1}{2}\right)-3(-8)=2x^2-9x-15+24=2x^2-9x+9$$

$$w=x^2-x+2\left(-7\frac{1}{2}\right)-2(-8)=x^2-x-15+16=x^2-x+1$$

$${}^{w}\log v={}^{\left(x^2-x+1\right)}\log\left(2x^2-9x+9\right)$$

$$x=-1\rightarrow {}^{w}\log v={}^{(1+1+1)}\log(2+9+9)={}^{3}\log 20=\frac{\log 20}{\log 3}$$

$$\log\left({}^{w}\log v\right)=\log\frac{\log 20}{\log 3}=\log\log 20-\log\log 3=\log 1,3010-\log 0,4771$$

$$=0,1143-(0,6786-1)=0,4357$$

$${}^{w}\log v=2,7271$$

Ambillah $y={}^{w}\log v={}^{\left(x^2-x+1\right)}\log\left(2x^2-9x+9\right)=\frac{\log\left(2x^2-9x+9\right)}{\log\left(x^2-x+1\right)}$, sehingga tanda fungsi y bergantung pada pembilang dan penyebutnya.

$$\log\left(2x^2-9x+9\right)>0$$

$$2x^2-9x+9>1$$

$$2x^2-9x+8>0$$

$$2\left(x-\frac{9+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{9-\sqrt{17}}{4}\right)>0$$

$x<\frac{9-\sqrt{17}}{4}$ atau $x>\frac{9+\sqrt{17}}{4}$ .... (1)

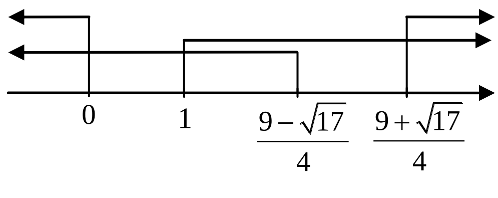
$$\log\left(x^2-x+1\right)>0$$

$$x^2-x+1>1$$

$$x^2-x>0$$

$$x(x-1)>0$$

$x<0$ atau $x>1$ .... (2)



Dari (1) $\cap$ (2) menghasilkan $x<0$ atau $1<x<\frac{9-\sqrt{17}}{4}$ atau $x>\frac{9+\sqrt{17}}{4}$.

Bersambung