

Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam
UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS
TAHUN 1937

ALJABAR

1. HBS (Hogere Burger School) Holland, 1937

Buat harga m yang mana persamaan kuadrat: $mx^2 - (7m-1)x + 6m+3 = 0$ mempunyai dua akar positif dan sama besar?

Solusi:

(1) Syarat agar persamaan kuadrat mempunyai akar sama besar (kembar) adalah

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(7m-1)]^2 - 4m(6m+3) = 0$$

$$49m^2 - 14m + 1 - 24m^2 - 12m = 0$$

$$49m^2 - 14m + 1 - 24m^2 - 12m = 0$$

$$25m^2 - 26m + 1 = 0$$

$$(m-1)(25m-1) = 0$$

$$m = 1 \text{ atau } m = \frac{1}{25}$$

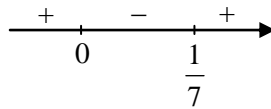
Syarat agar kedua akarnya positif adalah $x_1 + x_2 > 0$ dan $x_1 x_2 > 0$

(2) $x_1 + x_2 > 0$

$$-\frac{-(7m-1)}{m} > 0$$

$$\frac{7m-1}{m} > 0$$

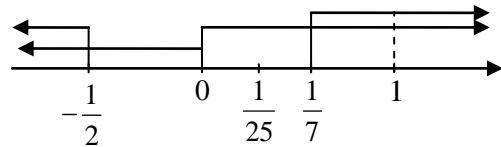
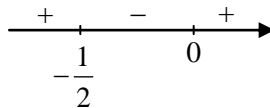
$$m < 0 \text{ atau } m > \frac{1}{7}$$



(3) $x_1 x_2 > 0$

$$\frac{6m+3}{m} > 0$$

$$m < -\frac{1}{2} \text{ atau } m > 0$$



Dari (1) \cap (2) \cap (3) diperoleh $m = 1$.

2. HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1937

Untuk m berharga sejati berapa, maka akar-akar persamaan kuadrat $(m-2)x^2 - (m+2)x + m+1 = 0$ kedua-keduanya menjadi positif?

Solusi:

Syarat kedua akar persamaan itu positif adalah $D = b^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 + x_2 > 0$, dan $x_1 x_2 > 0$

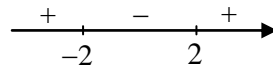
(1) $D = b^2 - 4ac \geq 0$

$$\begin{aligned}
& [-(m+2)]^2 - 4(m-2)(m+1) \geq 0 \\
& m^2 + 4m + 4 - 4m^2 + 4m + 8 \geq 0 \\
& -3m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\
& 3m^2 - 8m - 12 \leq 0 \\
& 3\left(m - \frac{8 + \sqrt{64 + 144}}{6}\right)\left(m - \frac{8 - \sqrt{64 + 144}}{6}\right) \leq 0 \\
& 3\left(m - \frac{8 + \sqrt{208}}{6}\right)\left(m - \frac{8 - \sqrt{208}}{6}\right) \leq 0 \\
& 3\left(m - \frac{8 + 4\sqrt{13}}{6}\right)\left(m - \frac{8 - 4\sqrt{13}}{6}\right) \leq 0 \\
& (3m - 4 - 2\sqrt{13})\left(m - \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3}\right) \leq 0 \\
& \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3} \leq m \leq \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}
\end{aligned}$$

(2) $x_1 + x_2 > 0$

$$-\frac{-(m+2)}{m-2} > 0$$

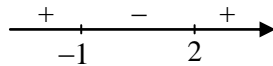
$$\frac{m+2}{m-2} > 0$$



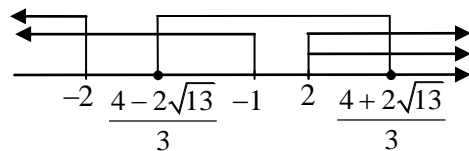
$$m < -2 \text{ atau } m > 2$$

(3) $x_1 x_2 > 0$

$$\frac{m+1}{m-2} > 0$$



$$m < -1 \text{ atau } m > 2$$



Dari (1) \cap (2) \cap (3) diperoleh $2 < m \leq \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}$.

3. HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1937

Suku banyak $x^4 - ax^3 - (a-b)x^2 + (3a+b+2)x - 3a - b$ mempunyai sisa $x-3$ kalau dibagi oleh $x^2 + x - 2$. Tentukan a dan b .

Solusi:

$$x^4 - ax^3 - (a-b)x^2 + (3a+b+2)x - 3a - b = (x^2 + x - 2)h(x) + x - 3$$

$$x^4 - ax^3 - (a-b)x^2 + (3a+b+2)x - 3a - b = (x+2)(x-1)h(x) + x - 3$$

$$x = -2 \rightarrow 16 + 8a - (a-b)4 + (3a+b+2)(-2) - 3a - b = (-2+2)(-2-1)h(-2) - 2 - 3$$

$$-5a + b + 12 = -5$$

$$5a - b = 17 \dots (1)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 - a - (a-b) + (3a+b+2) - 3a - b = (1+2)(1-1)h(1) + 1 - 3$$

$$-2a + b + 3 = -2$$

$$2a - b = 5 \dots (2)$$

Persamaan (1) – Persamaan (2) menghasilkan:

$$3a = 12$$

$$a = 4$$

$$2 \cdot 4 - b = 5$$

$$b = 3$$

4. **HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1937**

Ditentukan persamaan tingkat dua: $mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3 = 0$.

a. Berapakah harga m supaya persamaan itu mempunyai dua akar positif yang sama?

b. Berapakah harga m supaya akar-akar persamaan itu berbalikan?

Pandanglah sekarang fungsi $y = mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3 \dots (1)$

c. Gantilah m dengan harga-harga yang terdapat pada pertanyaan a dan b, lalu gambarkan grafik kedua fungsi itu bersama-sama pada satu pasang salib sumbu.

d. Tentukanlah dengan perhitungan di mana kedua garis lengkung itu berpotongan.

e. Buktikan bahwa grafik fungsi (1) untuk sebarang harga m , melalui titik-titik yang telah ditentukan pada d.

Solusi:

a. $mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3 = 0$

Syarat akar-akarnya positif dan sama adalah $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$, dan $D = b^2 - 4ac = 0$.

$$x_1 + x_2 > 0$$

$$-\frac{-(7m-1)}{m} > 0$$

$$\frac{7m-1}{m} > 0$$

$$m < 0 \text{ atau } m > \frac{1}{7} \dots (1)$$

$$x_1 x_2 > 0$$

$$\frac{6m+3}{m} > 0$$

$$m < -\frac{1}{2} \text{ atau } m > 0 \dots (2)$$

$$D = b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(7m-1)]^2 - 4 \cdot m \cdot (6m+3) = 0$$

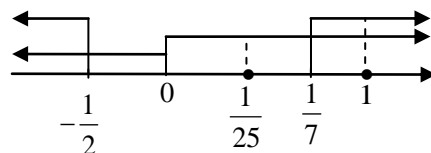
$$49m^2 - 14m + 1 - 24m^2 - 12m = 0$$

$$25m^2 - 26m + 1 = 0$$

$$(25m-1)(m-1) = 0$$

$$m = \frac{1}{25} \text{ atau } m = 1 \dots (3)$$

Dari $(1) \cap (2) \cap (3)$, diperoleh $m = 1$.



b. $x_2 = \frac{1}{x_1}$

$$x_1 x_2 = 1$$

$$\frac{6m+3}{m}=1$$

$$6m+3=m$$

$$5m=-3$$

$$m=-\frac{3}{5}$$

c. $m=1 \rightarrow y=mx^2-(7m-1)x+6m+3$

$$y=x^2-(7 \cdot 1-1)x+6 \cdot 1+3$$

$$y=x^2-6x+9$$

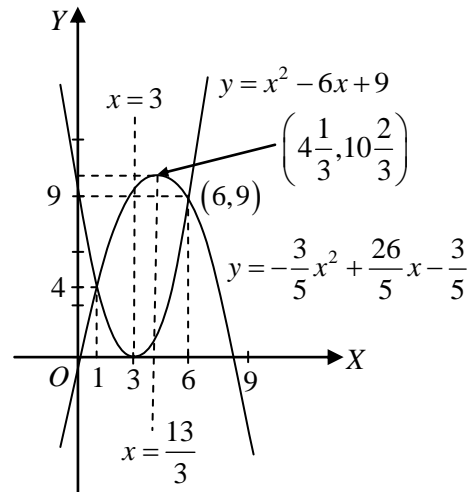
$$y=(x-3)^2$$

$m=-\frac{3}{5} \rightarrow y=mx^2-(7m-1)x+6m+3$

$$y=-\frac{3}{5}x^2-\left(-\frac{21}{5}-1\right)x-\frac{18}{5}+3$$

$$y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{26}{5}x-\frac{3}{5}$$

$$y=\frac{1}{5}(-3x^2+26x-3)$$



d. $y=x^2-6x+9$ dan $y=\frac{1}{5}(-3x^2+26x-3)$

$$x^2-6x+9=\frac{1}{5}(-3x^2+26x-3)$$

$$5x^2-30x+45=-3x^2+26x-3$$

$$8x^2-56x+48=0$$

$$x^2-7x+6=0$$

$$(x-1)(x-6)=0$$

$$x=1 \text{ atau } x=6$$

$$x=1 \rightarrow y=x^2-6x+9$$

$$y=1^2-6 \cdot 1+9=4 \Rightarrow (1,4)$$

$$x=6 \rightarrow y=x^2-6x+9$$

$$y=6^2-6 \cdot 6+9=9 \Rightarrow (6,9)$$

Bersambung