Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1936

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1936**

Carilah *x* dan *y* dari kedua persamaan yang berikut ini:

I: $2\times 9^{3x-2y+1\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{9}\times 3^{4y-6x}$

II: $\log\log(3x-1)=\log 2+\log\left\{\log(3x-2y+5)-2\log 2\right\}$

Solusi:

$$2\times 9^{3x-2y+1\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{9}\times 3^{4y-6x}$$

$$2\times 27\times 3^{6x-4y}+1=\frac{1}{9}\times\frac{1}{3^{6x-4y}}$$

Ambillah $a=3^{6x-4y}$, sehingga

$$54a+1=\frac{1}{9a}$$

$$486a^2+9a-1=0$$

$$486a^2+9a-1=0$$

$$a=\frac{-9\pm\sqrt{81+1944}}{972}=\frac{-9\pm 45}{972}$$

$$a=\frac{-9+45}{972}=\frac{1}{27}\vee a=\frac{-9-45}{972}=-\frac{1}{18}$$

$$3^{6x-4y}=\frac{1}{27}\text{(diterima)}\vee 3^{6x-4y}=-\frac{1}{18}\text{(ditolak)}$$

$$3^{6x-4y}=3^{-3}$$

$$6x-4y=-3$$

$$y=\frac{6x+3}{4}\ \text{.... (1)}$$

$$\log\log(3x-1)=\log 2+\log\left\{\log(3x-2y+5)-2\log 2\right\}$$

$$\log\log(3x-1)=\log 2+\log\left\{\log(3x-2y+5)-\log 4\right\}$$

$$\log\log(3x-1)=\log 2+\log\log\frac{1}{4}(3x-2y+5)$$

$$\log\log(3x-1)=\log 2\log\frac{1}{4}(3x-2y+5)$$

$$\log\log(3x-1)=\log\log\frac{1}{16}(3x-2y+5)^2$$

$$\left(3x-1\right)=\frac{1}{16}\left(3x-2y+5\right)^2$$

$\left(3x-2y+5\right)^2=16\left(3x-1\right)$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\left(3x-2\times\frac{6x+3}{4}+5\right)^2=16\left(3x-1\right)$$

$$\left(3x-3x-\frac{3}{2}+5\right)^2=48x-16$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^2=48x-16$$

$$\frac{49}{4}=48x-16$$

$$49=192x-64$$

$$192x=113$$

$$x=\frac{113}{192}$$

$$y=\frac{6x+3}{4}=\frac{6\times\frac{113}{192}+3}{4}=\frac{113+96}{128}=\frac{209}{128}$$

2. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1936**

   Untuk a berharga berapa, maka jumlah kuadrat akar-akar $\left(x_1^2+x_2^2\right)$ persamaan: $x^2-\left\{{}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)\right\}\times x+1=0$ menjadi lebih kecil dari pada jumlah kebalikan akar-akar itu.

   Solusi:

$$x_1^2+x_2^2<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

$$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2<\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$\left[{}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)\right]^2-2\cdot1<\frac{{}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)}{1}$$

$$\left[{}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)\right]^2-{}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)-2<0$$

Ambillah ${}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)=y$, sehingga

$$y^2-y-2<0$$

$$\left(y+1\right)\left(y-2\right)<0$$

$$-1<y<2$$

$$-1<{}^2\log\left(1-{}^2\log a\right)<2$$

$$^{2}\log\frac{1}{2} < {}^{2}\log\left(1 - {}^{2}\log a\right) < {}^{2}\log 4$$

$$\frac{1}{2} < 1 - {}^{2}\log a < 4$$

$$-\frac{1}{2} < -{}^{2}\log a < 3$$

$$\frac{1}{2} > {}^{2}\log a > -3$$

$$^{2}\log\sqrt{2} > {}^{2}\log a > 2\log\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{2} > a > \frac{1}{8}$$

3. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1936**

$$f_1(x) = ax^2 + 3x - \left(b + \frac{1}{2}\right)$$

$$f_2(x) = -ax^2 - 2x + \left(b - \frac{1}{2}\right)$$

Diketahui:

1. Kedua fungsi mempunyai sebuah harga persekutuan.
2. Fungsi kedua tidak nol pada $x = 0$ dan mempunyai ekstreem $-\frac{1}{2}$.

Tentukan *a* dan *b*.
Gambarlah dalam satu gambar grafik dari kedua fungsi dan jawablah kemudian:

1. Untuk *x* berharga berapa $f_1(x) = f_2(x)$.
2. Untuk *x* berharga berapa $f_1(x) > f_2(x)$.
3. Untuk *x* berharga berapa $f_1(x) < f_2(x)$.

Solusi:

1. Ambillah harga persekutuan antara $f_1(x)$dan $f_2(x)$ adalah x_1, sehingga

$$ax_1^2 + 3x_1 - \left(b + \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ .... (1)}$$

$$-ax_1^2 - 2x_1 + \left(b - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ .... (2)}$$

Persamaan (1) + Persamaan (2) menghasilkan $x_1 = 1$.

$$x_1 = 1 \to ax_1^2 + 3x_1 - \left(b + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$a + 3 - \left(b + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$a - b + 2\frac{1}{2} = 0 \text{ .... (3)}$$

2. $b-\frac{1}{2}\neq 0$

$b\neq \frac{1}{2}$

Nilai ekstreem $=-\frac{1}{2}$

$$\frac{(-2)^2-4(-a)\left(b-\frac{1}{2}\right)}{-4(-a)}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{4+4ab-2a}{4a}=-\frac{1}{2}$$

$4+4ab-2a=-2a$

$4ab=-4$

$ab=-1$

$a=-\frac{1}{b}$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan persamaan (4) diperoleh:

$-\frac{1}{b}-b+2\frac{1}{2}=0$

$2b^2-5b+2=0$

$(2b-1)(b-2)=0$

$b=\frac{1}{2}\text{(ditolak)}\vee b=2\text{(diterima)}$

$b=2\rightarrow a=-\frac{1}{2}$

Dengan demikian persamaan fungsi tersebut adalah

$f_1(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-2\frac{1}{2}$

$f_2(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1\frac{1}{2}$

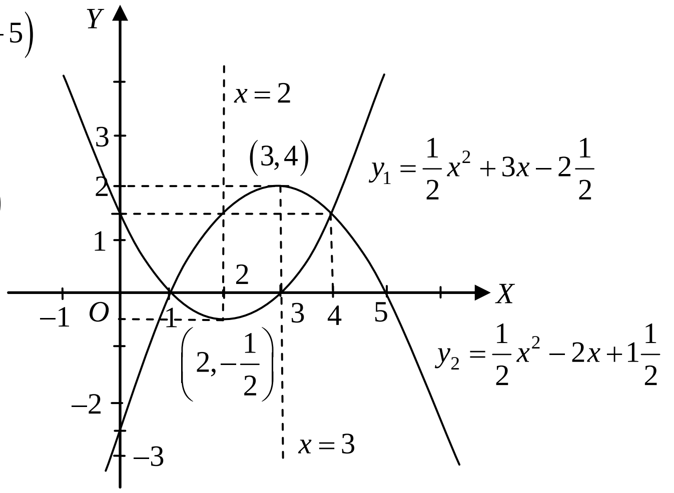
Skesa kedua grafik tersebut disajikan sebagai berikut.

$f_1(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-x^2+6x-5\right)$

$=\frac{1}{2}(-x+5)(x-1)$

$f_2(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(x^2-4x+3\right)$

$=\frac{1}{2}(x-3)(x-1)$



Bersambung