Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1935

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1935**

   Bangun ax^2+bx+c mencapai pada $x=\frac{1}{2}$ suatu harga yang terendah yang besarnya -4. Kalau bangun tadi dibagi $x+2$, maka sisanya 21. Hitunglah dari ketentuan-ketentuan ini koefisien *a*, *b*, dan *c*.

   Isikan harga-harga *a*, *b*, dan *c* yang telah ditemukan ini ke dalam $y=ax^2+bx+c$.

   Lukislah grafik dari fungsi akhir ini, tentukan tempat perpotongan dengan sumbu-sumbu, tentukan sumbu simetri, dan tempat minimum (kesatuan ukuran = 2 cm).

   Solusi:

   Karena grafik fungsi mempunyai nilai minimum (terendah), maka grafik terbuka ke atas, sehingga $a>0$.

   $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$

   $b=-a$ .... (1)

   $y=\frac{D}{-4a}=\frac{b^2-4ac}{-4a}=-4$

   $b^2-4ac=16a$ .... (2)

   $f(x)=ax^2+bx+c=(x+2)h(x)+21$

   $f(-2)=a(-2)^2+b(-2)+c=(-2+2)h(-2)+21$

   $4a-2b+c=21$ .... (3)

   Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

   $(-a)^2-4ac=16a$

   $a^2-4ac=16a$

   $a-4c=16$ .... (4)

   Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh:

   $4a-2(-a)+c=21$

   $4a+2a+c=21$

   $6a+c=21$

   $c=21-6a$ .... (5)

   Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh

   $a-4(21-6a)=16$

   $a-84+24a=16$

   $25a=100$

$a = 4$

$a = 4 \;\; a = 4 \to c = 21 - 6a = 21 - 6\cdot 4 = -3$

$a = 4 \to b = -a = -4$

Jadi, persamaan fungsi tersebut adalah $y = 4x^2 - 4x - 3$

Menentukan koordinat titik potong grafik dengan sumbu koordinat:

Grafik memotong sumbu X, jika $y = 0$, sehingga

$4x^2 - 4x - 3 = 0$

$(2x+1)(2x-3) = 0$

$x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ koordinat titik potong grafik dengan sumbu X adalah $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ dan $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Grafik memotong sumbu Y, jika $x = 0$, sehingga

$y = 4\cdot 0^2 - 4\cdot 0 - 3 = -3$

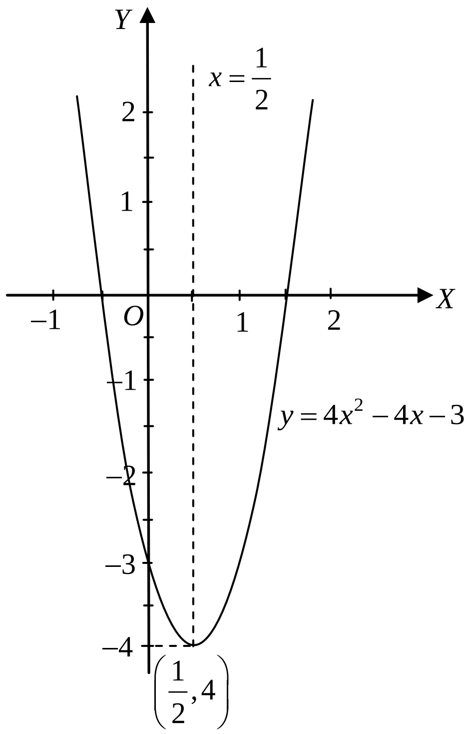
$\therefore$ koordinat titik potong grafik dengan sumbu Y adalah $(0, -3)$.

Sumbu simetri: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$

Karena $a > 0$, fungsi mempunyai nilai ekstrim berjenis minimum yang nilainya adalah

$y = \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{(-4)^2 - 4\cdot 4\cdot(-3)}{-4\cdot 4} = \frac{16+48}{-16} = -4$

Sketsa grafik fungsi $y = 4x^2 - 4x - 3$:



2. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1935**

Untuk m berharga bulat berapa, maka akar-akar persamaan: $(m+3)x^2+2(m-7)x+m-3=0$ kedua-keduanya positif?

Solusi:

Syarat kedua akar persamaan itu positif adalah $D=b^2-4ac\ge 0$, $x_1+x_2>0$, dan $x_1x_2>0$

(1) $D=b^2-4ac\ge 0$

$$\left[2(m-7)\right]^2-4(m+3)(m-3)\ge 0$$

$$m^2-14m+49-m^2+9\ge 0$$

$$-14m+58\ge 0$$

$$m\le\frac{58}{14}=4\frac{1}{7}$$

(2) $x_1+x_2>0$

$$-\frac{2(m-7)}{(m+3)}>0$$

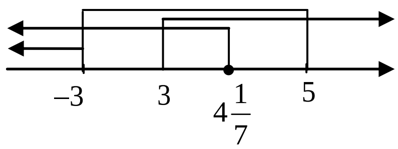
$$\frac{m-7}{m+3}<0$$

$$-3<m<5$$

(3) $x_1x_2>0$

$$\frac{m-3}{m+3}>0$$

$$m<-3 \text{ atau } m>3$$



Dari (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) diperoleh $m=4$.

3. **HBS (Hogere Burger School) Neerland, 1935**

Fungsi $u={}^2\log\left(ax^2+bx+c\right)$ mencapai pada $x=4$ harga 2.

Fungsi $z=2^{-\left(ax^2+bx+c\right)}$ mencapai pada $x=-6$ harga 1.

Antara a, b, dan c ada perhubungan $ac+b=0$.

Fungsi $y=ax^2+bx+c$ adalah positif pada $x=0$.

a. Tunjukkanlah dengan suatu perhitungan, bahwa oleh ketentuan-ketentuan ini: $a=-\frac{1}{15}$, $b=\frac{4}{15}$, dan $c=4$.
   Harga-harga ini lalu dimasukkan ke dalam ketiga fungsi y, u, dan z.
b. Adakah bagi tiap harga x sebuah harga y, u, dan z?
   Kalau tidak, maka hal ini terjadi pada fungsi mana (y, u, dan z) dan pada x berharga berapa?
c. Selidiki apakah fungsi-fungsi itu pernah menjadi nol; selidiki pula x berharga berapa, hal ini terjadi.
d. Selidiki apakah fungsi-fungsi itu mempunyai ekstrim, apakah ekstrim ini (max atau min), di mana tempatnya (x-nya), dan berapakah besarnya.
   Kepada x hanya diberikan harga-harga sejati dan terbatas (eindig).
   Jikalau bilangan tak terukur (dengan akar) maka haruslah mereka didekati samapai 4 decimal dengan sebuah daftar logaritma.

Solusi:

a. Jika $x=4$, maka $u=2$, sehingga

$u = {}^{2}\log\left(ax^2+bx+c\right)$

$2 = {}^{2}\log\left(16a+4b+c\right)$

$16a+4b+c=4$ .... (1)

Jika $x=-6$, maka $z=1$, sehingga

$z = 2^{-\left(ax^2+bx+c\right)}$

$1 = 2^{-\left(36a-6b+c\right)}$

$-\left(36a-6b+c\right)=0$

$36a-6b+c=0$ .... (2)

$ac+b=0$ .... (3)

Fungsi $y=ax^2+bx+c$ adalah positif pada $x=0$, sehingga

$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c>0$

$c>0$ .... (4)

3 × persamaan (1) + 2 × persamaan (2) menghasilkan:

$120a+5c=12$ .... (5)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh

$16a+4\left(-ac\right)+c=4$

$16a-4ac+c-4=0$

$-4a\left(c-4\right)+\left(c-4\right)=0$

$\left(-4a+1\right)\left(c-4\right)=0$

$a=\frac{1}{4}$ atau $c=4$

Substitusikan $a=\frac{1}{4}$ ke persamaan (5) sehingga diperoleh

$120\times\frac{1}{4}+5c=12$

$30+5c=12$

$5c=-18$

$c=-\frac{18}{5}$ (ditolak, karena $c>0$)

Substitusikan $b=-ac$ (dari persamaan (3)) dan $c=4$ ke persamaan (2), sehingga diperoleh

$36a-6\left(-ac\right)+c=0$

$36a-6\left(-a\times 4\right)+4=0$

$36a+24a+4=0$

$60a=-4$

$a=-\frac{4}{60}=-\frac{1}{15}$

Substitusikan $a=-\frac{1}{15}$ dan $c=4$ ke persamaan (3), sehingga diperoleh

$-\frac{1}{15}\times 4+b=0$

$b=\frac{4}{15}$

Dengan demikian diperoleh fungsi-fungsi $u={}^{2}\log\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)$,

$z=2^{-\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)}$, dan $y=-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4$.

b. Fungsi $u={}^{2}\log\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)$ mempunyai tidak nilai atau tidak terdefinisi, jika numerus logaritmanya $-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\le 0$, sehingga

$x^2-4x-60\ge 0$

$(x+6)(x-10)\le 0$

$-6\le x\le 10$

Fungsi $z=2^{-\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)}$ mempunyai nilai untuk semua $x\in R$.

Fungsi $y=-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4$ mempunyai nilai untuk semua $x\in R$.

c. $u={}^{2}\log\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)=0$

$-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4=1$

$x^2-4x-60=-15$

$x^2-4x-45=0$

$(x+5)(x-9)=0$

$x=-5\vee x=9$

$z=2^{-\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)}=0$, tidak ada nilai $x\in R$ yang memenuhi persamaan ini.

$y=-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4=0$

$x^2-4x-60=0$

$(x+6)(x-10)=0$

$x=-6\vee x=10$

d. Fungsi $u={}^{2}\log\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)$, akan bernilai maksimum jika fungsi $y=-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4$ (numerous) bernilai maksimum juga.

Jika $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{4}{15}}{2\left(-\frac{1}{15}\right)}=2$, maka fungsi y mencapai nilai maksimum sebesar

$$y_{\max}=\frac{D}{-4a}=\frac{b^2-4ac}{-4a}=\frac{\left(\frac{4}{15}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)\cdot 4}{-4\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)}=\frac{16+240}{60}=4\frac{4}{15}.$$

Nilai maksimum tersebut dapat juga ditentukan sebagai berikut.

$$y_{\max}(2)=-\frac{1}{15}(2)^2+\frac{4}{15}(2)+4=4\frac{4}{15}.$$

Dengan demikian,

$$u_{\max}={}^2\log 4\frac{4}{15}={}^2\log\frac{64}{15}=\frac{\log 64-\log 15}{\log 2}$$

$$\log u_{\max}=\log\frac{\log 64-\log 15}{\log 2}=\log\left(\log 64-\log 15\right)-\log\log 2$$

$$=\log\left(1,8062-1,1761\right)-\log 0,3010$$

$$=\log 0,6301-\left(0,4786-1\right)=0,7994-1-0,4786+1=0,3208$$

$$u_{\max}=2,0931$$

Fungsi $z=2^{-\left(-\frac{1}{15}x^2+\frac{4}{15}x+4\right)}=2^{\left(\frac{1}{15}x^2-\frac{4}{15}x-4\right)}$ mempunyai nilai ekstrim, jika fungsi $y=\frac{1}{15}x^2-\frac{4}{15}x-4$ mencapai nilai ekstrim.

Jika $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{4}{15}}{2\left(\frac{1}{15}\right)}=2$, maka fungsi y mencapai nilai minimum sebesar

$$y_{\min}=\frac{D}{-4a}=\frac{b^2-4ac}{-4a}=\frac{\left(-\frac{4}{15}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{15}\right)\cdot(-4)}{-4\cdot\left(\frac{1}{15}\right)}=\frac{16+240}{-60}=-4\frac{4}{15}.$$

Nilai maksimum tersebut dapat juga ditentukan sebagai berikut.

$$y_{\min}(2)=\frac{1}{15}(2)^2-\frac{4}{15}(2)-4=-4\frac{4}{15}.$$

Dengan demikian,

$$z_{\min}=2^{-4\frac{4}{15}}$$

$$\log z_{\min}=-4\frac{4}{15}\log 2=-\frac{64}{15}\log 2=-w$$

$$w=\frac{64}{15}\log 2$$

$$\log w=\log\frac{64}{15}+\log\log 2=\log 64-\log 15+\log\log 15=1,8062-1,1761+\log 0,3010$$

$$= 0,6301 + (0,4786 - 1) = 0,1087$$

$$w = 1,2844$$

$$\log z_{\min} = -1,2844 = 0,7156 - 2$$

$$z_{\min} = 0,0520$$

Fungsi $y = -\frac{1}{15}x^2 + \frac{4}{15}x + 4$ mempunyai nilai ekstrim maksimum.

Jika $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{4}{15}}{2\left(-\frac{1}{15}\right)} = 2$, maka fungsi y mencapai nilai maksimum sebesar

$$y_{\max} = \frac{D}{-4a} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{\left(\frac{4}{15}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot 4}{-4 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)} = \frac{16 + 240}{60} = 4\frac{4}{15}.$$

Bersambung