

Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam
UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS
TAHUN 1933

ALJABAR

1. HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1933

Diketahui bahwa $y = -2^{x+1} + (\sqrt{2})^x + 3$.

- a. Berapakah harga-harga y untuk $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$?
- b. Untuk x berharga sejati berapa, maka $y = 0$.
- c. Pada harga-harga y sejati berapa ada dua, satu, dan tidak ada harga sejati x ?

Solusi:

$$a. \quad x = -2 \rightarrow y = -2^{-2+1} + (\sqrt{2})^{-2} + 3 = -2^{-1} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + 3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 = 3$$

$$x = -2 \rightarrow y = -2^{-2+1} + (\sqrt{2})^{-2} + 3 = -2^{-1} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + 3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3 = 3$$

$$x = -1 \rightarrow y = -2^{-1+1} + (\sqrt{2})^{-1} + 3 = -2^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 3$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3 = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 + 0,7071 \approx 2,71$$

$$x = 0 \rightarrow y = -2^{0+1} + (\sqrt{2})^0 + 3 = -2 + 1 + 3 = 2$$

$$x = 1 \rightarrow y = -2^{1+1} + (\sqrt{2})^1 + 3 = -4 + \sqrt{2} + 3 = -1 + \sqrt{2} = 0,4142$$

$$x = 2 \rightarrow y = -2^{2+1} + (\sqrt{2})^2 + 3 = -8 + 2 + 3 = -3$$

$$b. \quad y = 0 \rightarrow -2^{x+1} + (\sqrt{2})^x + 3 = 0$$

$$2^{x+1} - (\sqrt{2})^x - 3 = 0$$

$$2 \left(2^{\frac{1}{2}x} \right)^2 - 2^{\frac{1}{2}x} - 3 = 0$$

Ambillah $w = 2^{\frac{1}{2}x}$, sehingga

$$2w^2 - w - 3 = 0$$

$$(2w - 3)(w + 1) = 0$$

$$w = \frac{3}{2} \vee w = -1$$

$$2^{\frac{1}{2}x} = \frac{3}{2} \text{ (diterima)} \vee 2^{\frac{1}{2}x} = -1 \text{ (ditolak)}$$

$$2^x = \frac{9}{4}$$

$$2^{x+2} = 9$$

$$\log 2^{x+2} = \log 9$$

$$(x+2)\log 2 = \log 9$$

$$x+2 = \frac{\log 9}{\log 2}$$

$$\log(x+2) = \log \frac{\log 9}{\log 2} = \log \log 9 - \log \log 2$$

$$= \log 0,9542 - \log 0,3010 = 0,9796 - 1 - (0,4786 - 1) = 0,5010$$

$$x+2 = 3,1696$$

$$x = 1,1696$$

c. $y = -2 \cdot 2^{\frac{1}{2}x \cdot 2} + 2^{\frac{1}{2}x} + 3$

Ambillah $w = 2^{\frac{1}{2}x}$, sehingga

$$y = -2w^2 + w + 3$$

$$2w^2 - w + y - 3 = 0$$

Persamaan kuadrat ini umumnya mempunyai dua akar w_1 dan w_2 .

► Jika persamaan semula dalam x harus mempunyai sebuah akar yang sejati (real), maka haruslah w_1 bernilai positif dan w_2 bernilai negatif (atau nol) atau sebaliknya, sehingga $w_1 w_2$ harus bernilai negatif atau nol.

$$w_1 w_2 \leq 0$$

$$\frac{y-3}{2} \leq 0$$

$$y \leq 3$$

► Jika persamaan semula dalam x harus mempunyai dua akar yang sejati (real), maka haruslah w_1 dan w_2 keduanya bernilai positif, sehingga

$$w_1 w_2 > 0$$

$$\frac{y-3}{2} > 0$$

$$y > 3 \dots (1)$$

Di samping itu, $D = b^2 - 4ac > 0$, sehingga

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y-3) > 0$$

$$1 - 8y + 24 > 0$$

$$8y < 25$$

$$y < 3\frac{1}{8} \dots (2)$$

Dari $(1) \cap (2)$ diperoleh: $3 < y < 3\frac{1}{8}$.

- Jika persamaan semula dalam x harus mempunyai dua akar yang sama dan sejati (real), maka haruslah

$$w_1 w_2 > 0$$

$$\frac{y-3}{2} > 0$$

$$y > 3 \dots (1)$$

Di samping itu, $D = b^2 - 4ac = 0$, sehingga

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y-3) = 0$$

$$1 - 8y + 24 = 0$$

$$8y = 25$$

$$y = 3\frac{1}{8} \dots (2)$$

Dari $(1) \cap (2)$ diperoleh: $y = 3\frac{1}{8}$.

- Jika persamaan semula dalam x harus mempunyai dua akar yang tidak sejati (real), maka haruslah

$$w_1 w_2 > 0$$

$$\frac{y-3}{2} > 0$$

$$y > 3 \dots (1)$$

Di samping itu, $D = b^2 - 4ac < 0$, sehingga

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y-3) < 0$$

$$1 - 8y + 24 < 0$$

$$8y > 25$$

$$y > 3\frac{1}{8} \dots (2)$$

Dari $(1) \cap (2)$ diperoleh: $y > 3\frac{1}{8}$.

Bersambung