Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1932

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1932**

Carilah *x* dari persamaan berikut.

$10^{2\log^2 x-1}+x^{\frac{1+\log 2-2\log^2 x}{\log x}}=\frac{1}{5}+3^{\frac{1}{\log 3}}$ bilangan pokok adalah 10.

Solusi 1:

$$10^{2\log^2 x-1}+x^{\frac{1+\log 2-2\log^2 x}{\log x}}=\frac{1}{5}+3^{\frac{1}{\log 3}}$$

$$10^{2\log^2 x-1}+\left(10^{\log x}\right)^{\frac{1+\log 2-2\log^2 x}{\log x}}=\frac{1}{5}+3^{{}^3\log 10}$$

$$10^{2\log^2 x-1}+10^{1+\log 2-2\log^2 x}=\frac{1}{5}+10$$

$$10^{2\log^2 x-1}+10^{\log 2}\times 10^{1-2\log^2 x}=\frac{51}{5}$$

$$10^{2\log^2 x-1}+\frac{2}{10^{2\log^2 x-1}}\times=\frac{51}{5}$$

Ambillah $y=10^{2\log^2 x-1}$, sehingga

$$y+\frac{2}{y}=\frac{51}{5}$$

$$5y^2-51y+10=0$$

$$(y-10)(5y-1)=0$$

$$y=10\vee y=\frac{1}{5}$$

$$10^{2\log^2 x-1}=10\vee 10^{2\log^2 x-1}=\frac{1}{5}$$

$$2\log^2 x-1=1\vee\frac{10^{2\log^2 x}}{10}=\frac{1}{5}$$

$$2\log^2 x=2\vee 10^{2\log^2 x}=2$$

$$\log^2 x=1\vee 2\log^2 x\times\log 10=\log 2$$

$$\log x=\pm 1\vee\log^2 x=\frac{1}{2}\log 2=\frac{1}{2}\times 0{,}3010=0{,}1505$$

$$\log x=1\rightarrow x_1=10$$

$\log x = -1 \to x_2 = \frac{1}{10}$

$\log^2 x = 0{,}1505$

$\log x = \pm\sqrt{0{,}1505}$

Ambillah $a = \sqrt{0{,}1505}$, sehingga

$\log a = \frac{1}{2}\log 0{,}1505 = \frac{1}{2}\left(0{,}1775 - 1\right) = 0{,}5888 - 1 \to a = 0{,}3880$

$\log x = \pm\sqrt{0{,}1505} = \pm 0{,}3880$

$\log x = 0{,}3880 \to x_3 = 2{,}4434$

$\log x = -0{,}3880 \to x_4 = 0{,}4093$

Solusi 2:

$$10^{2\log^2 x - 1} + x^{\frac{1+\log 2 - 2\log^2 x}{\log x}} = \frac{1}{5} + 3^{\frac{1}{\log 3}}$$

$$\frac{10^{2\log^2 x}}{10} + x^{\frac{\log 20 - 2\log^2 x}{\log x}} = \frac{1}{5} + 3^{{}^3\log 10}$$

$$\frac{10^{\log x \times 2\log x}}{10} + x^{\frac{\log 20}{\log x}} \times x^{\frac{-2\log^2 x}{\log x}} = \frac{1}{5} + 10$$

$$\frac{\left(10^{\log x}\right)^{2\log x}}{10} + x^{{}^x\log 20} \times x^{-2\log x} = \frac{51}{5}$$

$$\frac{x^{2\log x}}{10} + 20 \times x^{-2\log x} = \frac{51}{5}$$

$$x^{2\log x} + \frac{200}{x^{2\log x}} = 102$$

Ambillah $y = x^{2\log x}$, sehingga

$$y + \frac{200}{y} = 102$$

$y^2 - 102y + 200 = 0$

$(y - 100)(y - 2) = 0$

$y = 100$ atau $y = 2$

$x^{2\log x} = 100$ atau $x^{2\log x} = 2$

$2\log x \times \log x = \log 100$ atau $2\log x \times \log x = \log 2$

$2\log^2 x = 2$ atau $2\log^2 x = \log 2$

$\log^2 x = 1$ atau $\log^2 x = \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2} \times 0{,}3010 = 0{,}1505$

$\log x = \pm 1 \vee \log x = \pm\sqrt{0{,}1505}$

$\log x = 1 \to x_1 = 10$

$\log x = -1 \to x_2 = \frac{1}{10}$

$\log^2 x = 0{,}1505$

$\log x = \pm\sqrt{0{,}1505}$

Ambillah $a = \sqrt{0{,}1505}$, sehingga

$\log a = \frac{1}{2}\log 0{,}1505 = \frac{1}{2}\left(0{,}1775 - 1\right) = 0{,}5888 - 1 \to a = 0{,}3880$

$\log x = \pm\sqrt{0{,}1505} = \pm 0{,}3880$

$\log x = 0{,}3880 \to x_3 = 2{,}4434$

$\log x = -0{,}3880 \to x_4 = 0{,}4093$

2. **HBS (Hogere Burger School) NI, 1932**

Akar-akar dari persamaan $x^2 + px + q = 0$, kita sebut $x_1 \text{ dan } x_2$. Kita bentuk sekarang sebuah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya adalah $\frac{1}{x_1} + 2 \text{ dan } \frac{1}{x_2} + 2$.

Kalau diketahui bahwa dari persamaan baru ini koefisien dari x^2, dari *x*, dan dari suku tetap, dalam urutan ini merupakan suatu deret hitung, maka perhubungan apakah yang ada antara *p* dan *q*?

Buktikanlah bahwa jumlah kuadrat akar-akar persamaan pertama $\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ pada harga *p* dan *q* yang berubah-ubah (tetapi perhubungan antara *p* dan *q* tetap), mempunyai sebuah harga minimum. Hitunglah harga *p* dan *q* pada mana diperoleh harga minimum.

Solusi:

Persamaan kuadrat $x^2 + px + q = 0$ mempunyai akar-akar $x_1 \text{ dan } x_2$.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{p}{1} = -p$ dan $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$

Akar-akar persamaan kuadrat baru adalah $\frac{1}{x_1} + 2 \text{ dan } \frac{1}{x_2} + 2$.

$$JAA = \frac{1}{x_1} + 2 + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + 4 = \frac{-p}{q} + 4$$

$$HKA = \left(\frac{1}{x_1} + 2\right)\left(\frac{1}{x_2} + 2\right) = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} + 4 = \frac{1}{x_1 x_2} + 2\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right) + 4 = \frac{1}{q} + 2\left(\frac{-p}{q}\right) + 4$$

Persamaan kuadrat baru yang diminta adalah

$$x^2 - \left(JAA\right)x + HKA = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-p}{q} + 4\right)x + \frac{1}{q} + 2\left(\frac{-p}{q}\right) + 4 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{p}{q} - 4\right)x + \frac{1}{q} - \frac{2p}{q} + 4 = 0$$

Diketahui bahwa dari persamaan baru ini koefisien dari x^2, dari *x*, dan dari suku tetap, dalam urutan ini merupakan suatu deret hitung, sehingga diperoleh hubungan antara *p* dan *q* berikut ini.

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2$$

$$\frac{p}{q} - 4 - 1 = \frac{1}{q} - \frac{2p}{q} + 4 - \frac{p}{q} + 4$$

$p-5q=1-2p-p+8q$

$4p-13q-1=0$

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=p^2-2q$

Karena $4p-13q-1=0$ tetap berlaku, sehingga $q=\frac{1}{13}\left(4p-1\right)$, maka

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=p^2-\frac{2}{13}\left(4p-1\right)=p^2-\frac{8}{13}p+\frac{2}{13}$

Nilai minimum dicapai untuk $p=-\frac{-\frac{8}{13}}{2}=\frac{4}{13}$

Jadi, nilai minimum $x_1^2+x_2^2$ adalah $\left(\frac{4}{13}\right)^2-\frac{8}{13}\left(\frac{4}{13}\right)+\frac{2}{13}=\frac{16-32+26}{169}=\frac{10}{169}$

3. **HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1932**

Antara bilangan x dan y ada perhubungan berikut.

$x^{\log x}=10x^2y$

1. Hitunglah harga y, kalau $x=\frac{1}{10}$, juga kalau $x=1$, $x=100$, $x=10^p$.
2. Hitungkag x kalau $y=1$.
3. Buktikanlah bahwa pada tiap harga y yang lebih besar dari $\frac{1}{100}$ ada dua harga x yang ada (bestaanbaar) yang hasil perbanyakkannya 100.

Solusi:

1. $x^{\log x}=10x^2y\ \rightarrow\ y=\frac{x^{\log x}}{10x^2}$

$$x=\frac{1}{10}\rightarrow y=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{\log\frac{1}{10}}}{10\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}}{10\times\frac{1}{100}}=\frac{10}{\frac{1}{10}}=100$$

$$x=1\rightarrow y=\frac{1^{\log 1}}{10\times 1^2}=\frac{1^0}{10\times 1}=\frac{1}{10}$$

$$x=100\rightarrow y=\frac{100^{\log 100}}{10\times 100^2}=\frac{100^2}{10\times 100^2}=\frac{1}{10}$$

$$x=10^p\ \rightarrow y=\frac{\left(10^p\right)^{\log 10^p}}{10\left(10^p\right)^2}=\frac{\left(10^p\right)^p}{10\times 10^{2p}}=\frac{10^{p^2}}{10^{2p+1}}=10^{p^2-2p-1}$$

2. $y=1\rightarrow x^{\log x}=10x^2y$

$x^{\log x}=10x^2\cdot 1$

$\log x^{\log x}=\log 10x^2$

$\log x\cdot\log x=\log 10+\log x^2$

$\log^2 x-2\log x-1=0$

$$\log x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

$\log x=1+\sqrt{2}\vee\log x=1-\sqrt{2}$

$x=10^{1+\sqrt{2}}\vee x=10^{1-\sqrt{2}}$

3. $x^{\log x}=10x^2y\to y=\dfrac{x^{\log x}}{10x^2}$

$y=\dfrac{x^{\log x}}{10x^2}>\dfrac{1}{100}$

$\log\dfrac{x^{\log x}}{10x^2}>\log\dfrac{1}{100}$

$\log x^{\log x}-\log10x^2>-2$

$\log x\cdot\log x-\log10-\log x^2>-2$

$\log^2 x-2\log x+1>0$

Ambillah $\log^2 x-2\log x+1=k$, dengan $k>0$, sehingga diskriminannya adalah $D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(1-k)=4k>0$.

Karena $D>0$, maka akar-akarnya real.

$\log^2 x-2\log x+1-k=0$

$\log x_1+\log x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-2}{1}=2$

$\log x_1x_2=2$

$x_1x_2=10^2=100$ (qed)

4. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1932**

a. Untuk *p* berharga sejati berapa, maka bentuk $(p-2)x^2+(3p-6)x+2p-3\frac{1}{2}$ menjadi positif buat segala harga-harga sejati dari *x*?

b. Harga *p* yang bulat yang ditemukan dipertanyaan a sekarang dimasukkan ke dalam $y=(p-2)x^2+(3p-6)x+2p-3\frac{1}{2}$.

Untuk *x* berharga berapa maka *y* menjadi sebuah minimum?

c. Jelaskan ini secara grafis.

Solusi:

a. Agar bentuk kuadrat $(p-2)x^2+(3p-6)x+2p-3\frac{1}{2}$ selalu positif (untuk segala harga x yang sejati/real), maka haruslah

$a=p-2>0\Leftrightarrow p>2$ .... (1)

$D=b^2-4ac<0$

$(3p-6)^2-4(p-2)\left(2p-3\frac{1}{2}\right)<0$

$9p^2-36p+36-8p^2+30p-28<0$

$p^2 - 6p + 8 < 0$

$(p-2)(p-4) < 0$

$2 < p < 4$ .... (2)

Dari (1) $\cap$ (2) diperoleh $2 < p < 4$.

b. Bilangan bulat p dari $2 < p < 4$ adalah $p = 3$.

$$p = 3 \rightarrow y = (p-2)x^2 + (3p-6)x + 2p - 3\frac{1}{2}$$

$$y = (3-2)x^2 + (3\cdot 3 - 6)x + 2\cdot 3 - 3\frac{1}{2}$$

$$y = x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$$

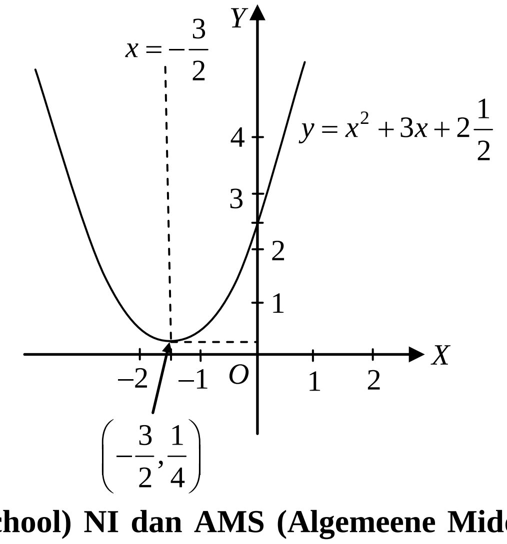
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \rightarrow y = x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$$

$$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 2\frac{1}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$$

Fungsi kuadrat ini mencapai minimum pada $x = -\frac{3}{2}$, sehingga nilai minimumnya adalah $y = \frac{1}{4}$.

c. Grafik fungsi kuadrat $y = x^2 + 3x + 2\frac{1}{2} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.



5. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1932**

a. Buktikan rumus ${}^{p}\log q = \frac{\log q}{\log p}$.

b. Carilah sesudahnya x dari persamaan: ${}^{ax^2}\log \frac{1}{a^2} - {}^{\frac{a^3}{x}}\log \frac{1}{a} = \frac{3}{5}$.

Solusi:

a. Ambillah ${}^{p}\log q = x$ .... (1)

Dari persamaan (1) diperoleh: $p^x = q$ .... (2)

Dari persamaan (2) diperoleh:

$p^x = q$

$\log p^x = \log q$

$x \log p = \log q$

$x = \dfrac{\log q}{\log p}$ .... (3)

Dari persamaan (1) dan (3) diperoleh:

${}^{p}\log q = \dfrac{\log q}{\log p}$ (terbukti/qed)

b. ${}^{ax^2}\log \dfrac{1}{a^2} - {}^{\frac{a^3}{x}}\log \dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{5}$

${}^{ax^2}\log a^{-2} - {}^{\frac{a^3}{x}}\log a^{-1} = \dfrac{3}{5}$

$-2\,{}^{ax^2}\log a + {}^{\frac{a^3}{x}}\log a = \dfrac{3}{5}$

$-2 \times \dfrac{{}^{a}\log a}{{}^{a}\log ax^2} + \dfrac{{}^{a}\log a}{{}^{a}\log \frac{a^3}{x}} = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{-2}{{}^{a}\log a + {}^{a}\log x^2} + \dfrac{1}{{}^{a}\log a^3 - {}^{a}\log x} = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{-2}{1 + 2\,{}^{a}\log x} + \dfrac{1}{3 - {}^{a}\log x} = \dfrac{3}{5}$

Ambillah $y = {}^{a}\log x$, sehingga

$\dfrac{-2}{1+2y} + \dfrac{1}{3-y} = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{-6+2y+1+2y}{3+5y-2y^2} = \dfrac{3}{5}$

$20y - 25 = 9 + 15y - 6y^2$

$6y^2 + 5y - 34 = 0$

$(6y+17)(y-2) = 0$

$y = -\dfrac{17}{6} \vee y = 2$

${}^{a}\log x = -3 + \dfrac{1}{6} \vee {}^{a}\log x = 2$

$x = a^{-3+\frac{1}{6}} \vee x = a^2$

$x = \dfrac{1}{a^3}\sqrt[6]{a} \vee x = a^2$

6. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1932**

Ditentukan sebuah persamaan kuadrat dalam *x*, $4x^2 - (8m+4)x + 3m^2 + 6m + 5 = 0$. Berapa harga-harga *m* supaya kedua akar persamaan itu sejati (nyata) dan positif?

Solusi:

Syarat kedua akar persamaan itu nyata dan positif adalah $D = b^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 + x_2 > 0$, dan $x_1 x_2 > 0$

(1) $D = b^2 - 4ac \geq 0$

$$\left[-(8m+4)\right]^2 - 4 \cdot 4 \cdot \left(3m^2 + 6m + 5\right) \geq 0$$

$$64m^2 + 64m + 16 - 48m^2 - 96m - 80 \geq 0$$

$$16m^2 - 32m - 64 \geq 0$$

$$m^2 - 2m - 4 \geq 0$$

$$\left(m - \frac{2+\sqrt{4+16}}{2}\right)\left(m - \frac{2-\sqrt{4+16}}{2}\right) \geq 0$$

$$\left(m - \frac{2+2\sqrt{5}}{2}\right)\left(m - \frac{2-2\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$

$$\left(m - 1 - \sqrt{5}\right)\left(m - 1 + \sqrt{5}\right) \geq 0$$

$$m \leq 1 - \sqrt{5} \text{ atau } m \geq 1 + \sqrt{5}$$

(2) $x_1 + x_2 > 0$

$$-\frac{-(8m+4)}{4} \geq 0$$

$$2m + 1 \geq 0$$

$$m > -\frac{1}{2}$$

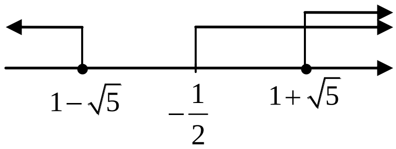
(3) $x_1 x_2 > 0$

$$\frac{3m^2 + 6m + 5}{4} > 0$$

$$3m^2 + 6m + 5 > 0$$

Karena $D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 36 - 60 = -24 < 0$, maka bentuk kuadrat ini selalu bernilai positif untuk setiap nilai *m* yang real.

Dari (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) diperoleh $m \geq 1 + \sqrt{5}$.



7. **LO 1932**

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - 6\frac{1}{2}x + 21\right)^p = \left(\frac{1}{2}x^2 - 6\frac{1}{2}x + 21\right)^q$$

Kalau $p = {}^6\log\left(6^{2x-10} - 10\right)$ dan $q = {}^6\log 144 - 2x + 10$

Solusi:

1) $p = q$

$${}^{6}\log\left(6^{2x-10}-10\right)={}^{6}\log 144-2x+10$$

$${}^{6}\log\left(6^{2x-10}-10\right)={}^{6}\log 36+{}^{6}\log 4-2x+10$$

$${}^{6}\log\left(6^{2x-10}-10\right)={}^{6}\log 36+{}^{6}\log 4-2x+10$$

$${}^{6}\log\left(6^{2x-10}-10\right)=2+{}^{6}\log 4-2x+10$$

$${}^{6}\log\left(6^{2x-10}-10\right)={}^{6}\log 4-2x+12$$

$${}^{6}\log\left(6^{2x-10}-10\right)-{}^{6}\log 4=-2x+12$$

$${}^{6}\log\frac{6^{2x-10}-10}{4}=-2x+12$$

$$\frac{6^{2x-10}-10}{4}=\frac{36}{6^{2x-10}}$$

$$6^{2x-10}-10=\frac{144}{6^{2x-10}}$$

$$6^{2(2x-10)}-10\times 6^{2x-10}-144=0$$

Ambillah $y=6^{2x-10}$, sehingga

$$y^2-10y-144=0$$

$$(y-18)(y+8)=0$$

$y=18$(diterima) atau $y=-8$(ditolak)

$$6^{2x-10}=18$$

$$\log 6^{2x-10}=\log 18$$

$$(2x-10)\log 6=\log 18$$

$$2x-10=\frac{\log 18}{\log 6}=1{,}6131$$

$$2x=11{,}6131$$

$$x=5{,}8066$$

2) $\frac{1}{2}x^2-6\frac{1}{2}x+21=1$

$$x^2-13x+42=2$$

$$x^2-13x+40=0$$

$$(x-5)(x-8)=0$$

$x=5$(ditolak) atau $x=8$(diterima)

3) $\frac{1}{2}x^2-6\frac{1}{2}x+21=0$

$$x^2-13x+42=0$$

$$(x-6)(x-7)=0$$

$x=6$ atau $x=7$

Sayaratnya:

$$x=6\rightarrow p={}^{6}\log\left(6^{2\times 6-10}-10\right)={}^{6}\log 26>0$$

$x = 6 \rightarrow q = {}^{6}\log 144 - 2 \times 6 + 10 = {}^{6}\log 144 - 2 > 0$

$x = 7 \rightarrow p = {}^{6}\log\left(6^{2\times7-10} - 10\right) = {}^{6}\log 1286 > 0$

$x = 7 \rightarrow q = {}^{6}\log 144 - 2 \times 7 + 10 = {}^{6}\log 144 - 4 < 0$

Sehingga $x = 6$ (diterima)

4) $\frac{1}{2}x^2 - 6\frac{1}{2}x + 21 = -1$

$x^2 - 13x + 44 = 0$ tidak memiliki akar real, karena $D = \left(-13\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44 = -7$

Jadi, nilai *x* yang memenuhi adalah $x = 5{,}8066$; $x = 6$; $x = 8$.

Bersambung