Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1931

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) NI, 1931**

   Buktikan bahwa ruas pertama dari persamaanm kuadrat $x^2 + px + q = 0$ dapat diuraikan menjadi dua faktor yang masing-masing linear dalam *x* (pangkat pertama dalam *x*). Uraikan selanjutnya: $x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2$

   Solusi:

   Persamaan kuadrat $x^2 + px + q = 0$ dapat dinyatakan sebagai $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$, sehingga $x_1 + x_2 = -p$ dan $x_1x_2 = q$.

   Persamaan kuadrat $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ dapat dijabarkan menjadi

   $x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$

   $x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0$

   $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ (dua faktor linear)

   Di sini x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + px + q = 0$, sehingga dengan rumus kuadrat (rumus abc) diperoleh: $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ (qed)

   Selanjutnya:

   $x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = 0$

   $x^2 + \left(2y + 2\sqrt{2}\right)x - \left(3y^2 - 2y\sqrt{2} - 2\right) = 0$

   $$x_{1,2} = \frac{-\left(2y + 2\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{\left(2y + 2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left[-\left(3y^2 - 2y\sqrt{2} - 2\right)\right]}}{2}$$

   $$= \frac{-2y - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{4y^2 + 8y\sqrt{2} + 8 + 12y^2 - 8y\sqrt{2} - 8}}{2} = \frac{-2y - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{16y^2}}{2}$$

   $$= \frac{-2y - 2\sqrt{2} \pm 4y}{2}$$

   $x_1 = \dfrac{-2y - 2\sqrt{2} + 4y}{2} = y - \sqrt{2}$ atau $x_2 = \dfrac{-2y - 2\sqrt{2} - 4y}{2} = -3y - \sqrt{2}$

   $x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - y + \sqrt{2}\right)\left(x + 3y + \sqrt{2}\right)$

2. **HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1931**

   Carilah *x* dari ${}^{\sqrt{7}}\log\left({}^{\sqrt{7}}\log x\right) = -\sqrt{7}$

   ($\sqrt{7}$ adalah bilangan pokok dari sistim logaritma ini)

   Solusi:

$${}^{\sqrt{7}}\log\left({}^{\sqrt{7}}\log x\right) = -\sqrt{7}$$

$${}^{\sqrt{7}}\log x = \left(\sqrt{7}\right)^{-\sqrt{7}}$$

$$x = \left(\sqrt{7}\right)^{\left(\sqrt{7}\right)^{-\sqrt{7}}}$$

$$\log x = \left(\sqrt{7}\right)^{-\sqrt{7}} \log\sqrt{7}$$

$$\log\log x = \log\log\sqrt{7} - \sqrt{7}\log\sqrt{7}$$

Ambillah $a = \log\log\sqrt{7}$ dan $b = \sqrt{7}\log\left(\sqrt{7}\right)$, sehingga

$$a = \log\log\sqrt{7} = \log\left(\frac{1}{2}\log 7\right) = \log\left(\frac{1}{2}\times 0,8451\right) = \log 0,4226 = 0,6259 - 1$$

$$b = \sqrt{7}\log\sqrt{7}$$

$$\log b = \log\sqrt{7} + \log\log\sqrt{7} = \frac{1}{2}\times 0,8451 + 0,6259 - 1 = 0,4226 + 0,6259 - 1 = 0,0485$$

$$b = 1,1181$$

$$\therefore \log\log x = a - b = 0,6259 - 1 - 1,1181 = 0,5078 - 2$$

$$\log x = 0,0322$$

$$x = 1,0767$$

3. **HBS (Hogere Burger School) NI, 1931**

Buktikan bahwa ${}^{a}\log b = \dfrac{\log b}{\log a}$, di dalam mana bilangan pokok dari ruas kedua boleh diambil sebarang.

Carilah sesudah itu, x dari persamaan $\dfrac{1}{{}^{(x+6)}\log x} + {}^{x}\log\left(x-1\right) = 2 + \dfrac{1}{{}^{2}\log x}$.

Solusi:

Ambillah $\log a = {}^{10}\log a = x \Leftrightarrow 10^x = a$ dan ${}^{a}\log b = y \Leftrightarrow a^y = b$.

Karena itu, $b = a^y = \left(10^x\right)^y = 10^{xy}$.

Sehingga ${}^{10}\log b = xy = {}^{10}\log a \times {}^{a}\log b$

$$\therefore {}^{a}\log b = \frac{{}^{10}\log b}{{}^{10}\log a} = \frac{\log b}{\log a} \quad \text{(qed)}$$

$$\frac{1}{{}^{(x+6)}\log x} + {}^{x}\log\left(x-1\right) = 2 + \frac{1}{{}^{2}\log x}$$

$${}^{x}\log\left(x+6\right) + {}^{x}\log\left(x-1\right) = {}^{x}\log x^2 + {}^{x}\log 2$$

$${}^{x}\log\left(x^2 + 5x - 6\right) = {}^{x}\log 2x^2$$

$$x^2 + 5x - 6 = 2x^2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\left(x-2\right)\left(x-3\right) = 0$$

$$x = 2 \text{ atau } x = 3$$

4. **AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1931**

A. Persamaan $2x^2-2px-2x+3p+3=0$, mempunyai dua akar yang sama. Tentukan *p*.

B. Persamaan $2x^2-2mx-2x+3m+3=0$ mempunyai akar-akar yang sejati. Untuk m berharga berapa akar-akar ini sejati.

Solusi:

A. Syarat persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang sama adalah $D=b^2-4ac=0$, sehingga

$$2x^2-2px-2x+3p+3=0$$

$$2x^2+(-2p-2)x+3p+3=0$$

$$(-2p-2)^2-4\cdot 2\cdot(3p+3)=0$$

$$p^2+2p+1-6p-6=0$$

$$p^2-4p-5=0$$

$$(p+1)(p-5)=0$$

$$p=-1 \text{atau } p=5$$

B. Syarat persamaan kuadrat mempunyai akar-akar yang sejati (real) adalah $D=b^2-4ac\geq 0$, sehingga

$$2x^2-2mx-2x+3m+3=0$$

$$2x^2+(-2m-2)x+3m+3=0$$

$$(-2m-2)^2-4\cdot 2\cdot(3m+3)\geq 0$$

$$m^2+2m+1-6m-6\geq 0$$

$$m^2-4m-5\geq 0$$

$$(m+1)(m-5)\geq 0$$

$$m\leq -1 \text{atau } m\geq 5$$

5. **AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1931**

Carilah *x* dari ${}^{7}\log(x-1)+2\times^{x-1}\log 7=\dfrac{\log^2 5-\log^2 2}{\log\sqrt[3]{2,5}}$.

Solusi:

$${}^{7}\log(x-1)+2\times^{x-1}\log 7=\frac{\log^2 5-\log^2 2}{\log\sqrt[3]{2,5}}$$

$${}^{7}\log(x-1)+\frac{2}{{}^{7}\log(x-1)}=\frac{(\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)}{\frac{1}{3}\log 2,5}$$

$${}^{7}\log(x-1)+\frac{2}{{}^{7}\log(x-1)}=\frac{(\log 5-\log 2)\log 10}{\frac{1}{3}(\log 5-\log 2)}$$

$${}^{7}\log(x-1)+\frac{2}{{}^{7}\log(x-1)}=3$$

Ambillah $y={}^{7}\log(x-1)$, sehingga

$$y + \frac{2}{y} = 3$$
$$y^2 - 3y + 2 = 0$$
$$(y-1)(y-2) = 0$$
$$y = 1 \vee y = 2$$
$${}^7\log(x-1) = 1 \vee {}^7\log(x-1) = 2$$
$$x - 1 = 7 \vee x - 1 = 49$$
$$x = 8 \vee x = 50$$

6. **HBS (Hogere Burger School), 1931**

Uraikan bentuk di bawah ini atas faktor-faktor: $x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2$

Solusi:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = 0$$
$$x^2 + \left(2y + 2\sqrt{2}\right)x - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-2y - 2\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2y + 2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2\right)}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{-2y - 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 + 3y^2 - 2y\sqrt{2} - 2}}{2}$$
$$x_{1,2} = -y - \sqrt{2} \pm \sqrt{4y^2} = -y - \sqrt{2} \pm 2y$$
$x_1 = -y - \sqrt{2} + 2y = y - \sqrt{2}$ atau $x_2 = -y - \sqrt{2} - 2y = -3y - \sqrt{2}$

Jadi, $x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2} - 3y^2 + 2y\sqrt{2} + 2 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - y + \sqrt{2}\right)\left(x + 3y + \sqrt{2}\right)$

7. **HBS (Hogere Burger School) 1931**

Ditentukan bahwa persamaan $x^2 + 2x - a = 0$ dan $x^2 + 3x + b = 0$ mempunyai satu akar berserikat. Tentukan perhubungan antara *a* dan *b*.

Solusi:

Ambillah akar yang sama tersebut adalah x_1, sehingga

$x_1^2 + 2x_1 - a = 0$ .... (1)

$x_1^2 + 3x_1 + b = 0$ .... (2)

Persamaan (2) – persamaan (1) menghasilkan:

$$x_1 + b + a = 0$$
$$x_1 = -a - b$$
$$x_1 = -a - b \to x^2 + 2x - a = 0$$
$$(-a-b)^2 + 2(-a-b) - a = 0$$
$$a^2 + 2ab + a^2 - 2a - 2b - a = 0$$
$$a^2 + 2ab + a^2 - 3a - 2b = 0$$

8. **AMS (Algemeene Middelbare School) 1931**

Buat harga-harga p yang mana persamaan $2x^2 - 2px - 2x + 3p + 3 = 0$ mempunyai dua akar yang sama.

Solusi:

Syarat agar persamaan kuadrat mempunyai akar sama besar (kembar) adalah $D = b^2 - 4ac = 0$

$2x^2 - 2px - 2x + 3p + 3 = 0$

$2x^2 - (2p+2)x + 3p + 3 = 0$

$\left[-(2p+2)\right]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3p+3) = 0$

$4p^2 + 8p + 4 - 24p - 24 = 0$

$4p^2 - 16p - 20 = 0$

$p^2 - 4p - 5 = 0$

$(p+1)(p-5) = 0$

$p = -1$ atau $p = 5$

9. **AMS (Algemeene Middelbare School) 1931**

Buat harga-harga m yang mana persamaan $2x^2 - 2mx - 2x + 3m + 3 = 0$ mempunyai dua akar yang nyata.

Solusi:

Syarat agar persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang nyata adalah $D = b^2 - 4ac \geq 0$

$2x^2 - 2mx - 2x + 3m + 3 = 0$

$2x^2 - (2m+2)x + 3m + 3 = 0$

$\left[-(2m+2)\right]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3m+3) \geq 0$

$4m^2 + 8m + 4 - 24m - 24 \geq 0$

$4m^2 - 16m - 20 \geq 0$

$m^2 - 4m - 5 \geq 0$

$(m+1)(m-5) \geq 0$

$m \leq -1$ atau $m \geq 5$

10. **HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1931**

Buktikanlah dalil: kalau persamaan-persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dan $px^2 + qx + r = 0$ mempunyai satu akar persekutuan, maka akar (persekutuan) itu menjadi juga sebuah akar dari persamaan: $(bp - aq)x + (pc - ra) = 0$.

Bagaimana perhubungan antara a dan b, kalau persamaan-persamaan $x^2 + 2x - a = 0$ dan $x^2 + 3x + b = 0$ mempunyai satu akar persekutuan?

Hitunglah a dan b, kalau kedua persamaan yang tersebut terakhir ini mempunyai suatu akar persekutuan dan $b = 2a$.

Solusi:

$ax^2 + bx + c = 0$ .... (1)

$px^2 + qx + r = 0$ .... (2)

$p \times$ persamaan (1) – $a \times$ persamaan (2) menghasilkan:

$pbx + pc - aqx - ar = 0$

$\left(pb-aq\right)x+\left(pc-ar\right)=0$ (qed)

$x^2+2x-a=0$ .... (3)

$x^2+3x+b=0$ .... (4)

Persamaan (3) – Persamaan (4) menghasilkan:

$-x-a-b=0$

$x=-a-b$

$$x=-a-b\to x^2+2x-a=0$$

$$\left(-a-b\right)^2+2\left(-a-b\right)-a=0$$

$$a^2+2ab+b^2-3a-2b=0$$

$$b=2a\to\ a^2+2ab+b^2-3a-2b=0$$

$$a^2+2a\cdot 2a+\left(2a\right)^2-3a-2\cdot 2a=0$$

$$9a^2-7a=0$$

$$a\left(9a-7\right)=0$$

$$a=0\vee a=\frac{7}{9}$$

$$a=0\to b=2\cdot 0=0$$

$$a=\frac{7}{9}\to b=2\cdot\frac{7}{9}=\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$$

Bersambung