Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1930

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1930**

Pada persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$, maka *a*, *b*, dan *c* dapat diketemukan sebagai berikut.

a ialah harga sejati yang memenuhi kepada persamaan: $\log y=\left(\log 3-\log y\right)+1$ dengan bilangan pokok logaritma 2.

b adalah sebesar: ${}^{3}\log^{2}81-1\frac{1}{2}\lim\left(1+\cos 60^\circ+\cos^2 60^\circ+...\right)$

c adalah harga *A* pada persamaan lengkap: $x^2-4x-A=0$ dan $x^2-10x+A=0$, jikalau diketahui bahwa kedua persamaan ini mempunyai satu akar persekutuan.

Setelah harga-harga *a*, *b*, dan *c* terdapat, maka haruslah mereka itu dimasukkan ke dalam persamaan $ax^2+bx+c=0$ (dengan $x_1 \text{ dan } x_2$ sebagai akar-akarnya).

Diminta sekarang untuk membentuk sebuah persamaan kuadrat baru dalam *z* yang kedua akarnya masing-masing sama dengan $\frac{1}{x_1+1}$ dan $\frac{1}{x_2+1}$.

Solusi:

$${}^{2}\log y=\left({}^{2}\log 3-{}^{2}\log y\right)+1$$

$${}^{2}\log y={}^{2}\log\frac{3}{y}+{}^{2}\log 2$$

$${}^{2}\log y={}^{2}\log\frac{16}{y}$$

$$y=\frac{16}{y}$$

$$y^2=16$$

$$y=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

$y=4$ (diterima) atau $y=4$ (ditolak, karena numerous logaritma harus positif)

$\therefore a=4$

$$b={}^{3}\log^{2}81-1\frac{1}{2}\lim\left(1+\cos 60^\circ+\cos^2 60^\circ+...\right)=\left({}^{3}\log 81\right)^2-1\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\cos 60^\circ}=4^2-1\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=16-1\frac{1}{2}\times 2=16-3=13$$

Ambillah akar persekutuan adalah x_1

$x_1^2 - 4x_1 - A = 0$ .... (1)

$x_1^2 - 10x_1 + A = 0$ .... (2)

Persamaan (1) – Persamaan (2) menghasilkan

$6x_1 - 2A = 0$

$x_1 = \frac{A}{3}$

$\left(\frac{A}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{A}{3}\right) - A = 0$

$\frac{A^2}{9} - \frac{4A}{3} - A = 0$

$A^2 - 12A - 9A = 0$

$A^2 - 21A = 0$

$A(A - 21) = 0$

$A = 0$ atau $A = 21$

$\therefore c = 21$

$\therefore$ persamaan kuadratnya $4x^2 + 13x + 21 = 0$

$$JAA = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{-\frac{13}{4} + 2}{\frac{21}{4} - \frac{13}{4} + 1} = \frac{-13+8}{21-13+4} = \frac{-5}{12}$$

$$HKA = \frac{1}{x_1+1} \times \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{1}{\frac{21}{4} - \frac{13}{4} + 1} = \frac{4}{21-13+4} = \frac{4}{12}$$

Jadi, persamaan kuadrat yang diminta adalah

$z^2 - (JAA)z + HKA = 0$

$z^2 - \left(\frac{-5}{12}\right)z + \frac{4}{12} = 0$

$12z^2 + 5z + 4 = 0$

2. **HBS (Hogere Burger School) 1930**

Ditentukan persamaan $4x^2 + 13x + 21 = 0$. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akarnya $y_1 = \frac{1}{x_1+1}$ dan $y_2 = \frac{1}{x_2+1}$, apabila x_1 dan x_2 akar-akar persamaan di atas.

Solusi 1:

Jumlah akar-akar (JAA) $= y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{-\frac{13}{4} + 2}{\frac{21}{4} - \frac{13}{4} + 1}$

$= \frac{-13+8}{21-13+4} = -\frac{5}{12}$

Hasil kali akar-akar (HKA) $= y_1y_2 = \frac{1}{x_1+1} \times \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = \frac{1}{\frac{21}{4} - \frac{13}{4} + 1}$

$$= \frac{4}{21-13+4} = -\frac{4}{12}$$

Persamaan kuadrat barunya adalah

$x^2 - (JAA)x + HKA = 0$

$x^2 - \left(-\frac{5}{12}\right)x + \frac{4}{12} = 0$

$12x^2 + 5x + 4 = 0$

Solusi 2: Metode Invers

$y_1 = \frac{1}{x_1+1}$

$x + 1 = \frac{1}{y}$

$x = \frac{1}{y} - 1$

$x = \frac{1}{y} - 1 \to 4x^2 + 13x + 21 = 0$

$$4\left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + 13\left(\frac{1}{y} - 1\right) + 21 = 0$$

$$\frac{4}{y^2} - \frac{8}{y} + 4 + \frac{13}{y} - 13 + 21 = 0$$

$$\frac{4}{y^2} + \frac{5}{y} + 12 = 0$$

$$12y^2 + 5y + 4 = 0 \text{ atau } 12x^2 + 5x + 4 = 0$$

3. **HBS (Hogere Burger School) Nederland, 1930**

Keluarkan *x*, *y*, dan *z* dari persamaan-persamaan beriukut.

I. $3x + z = 10$

II. $2x - y - 2z = a$

III. $x + y + z - u = 6$

IV. $x + y + z^2 = b$

Tentukanlah sesudah itu suatu perhubungan antara *a* dan *b* sedemikian, hingga hasil perbanyakkan akar-akar persamaan dalam *u* (yang terjadi karena pengeluaran *x*, *y*, dan *z*) sama dengan 1.

Solusi:

Persamaan II + Persamaan III menghasilkan:

$3x - z - u = a + 6$

$3x - z = a + u + 6$ V

Persamaan I + Persamaan V menghasilkan:

$6x = a + u + 16$

$x = \frac{a+u+16}{6}$

Substitusikan $x = \frac{a+u+16}{6}$ ke persamaan $3x + z = 10$, sehingga diperoleh

$$3 \times \frac{a+u+16}{6} + z = 10$$

$$z = 10 - \frac{a+u+16}{2} = \frac{4-a-u}{2}$$

Substitusikan $x = \frac{a+u+16}{6}$ dan $z = \frac{4-a-u}{2}$ ke persamaan $2x - y - 2z = a$, sehingga diperoleh

$$2 \times \frac{a+u+16}{6} - y - 2 \times \frac{4-a-u}{2} = a$$

$$2a + 2u + 32 - 6y - 24 + 6a + 6u = 6a$$

$$2a + 8u + 8 = 6y$$

$$y = \frac{a+4u+4}{3}$$

Substitusikan $x = \frac{a+u+16}{6}$, $y = \frac{a+4u+4}{3}$, dan $z = \frac{4-a-u}{2}$ ke persamaan $x + y + z^2 = b$, sehingga diperoleh

$$\frac{a+u+16}{6} + \frac{a+4u+4}{3} + \left(\frac{4-a-u}{2}\right)^2 = b$$

$$\frac{3a+9u+24}{6} + \frac{16+a^2+u^2-8a-8u+2au}{4} = b$$

$$6a + 18u + 48 + 48 + 3a^2 + 3u^2 - 24a - 24u + 6au = 12b$$

$$3u^2 - 18a - 6u + 96 + 3a^2 + 6au = 12b$$

$$u^2 - 6a - 2u + 32 + a^2 + 2au = 4b$$

$$u^2 + 2(a-1)u + a^2 - 6a + 32 - 4b = 0$$

$$u_1 u_2 = \frac{a^2 - 6a + 32 - 4b}{1} = 1$$

$$a^2 - 6a - 4b + 31 = 0$$

Bersambung