

Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Masa Silam
UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS
TAHUN 1929

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) NI dan AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1929**

Hitunglah x pada $\frac{x^{\log 5x}}{5x^{\log x}} = 25$

Solusi:

$$\frac{x^{\log 5x}}{5x^{\log x}} = 25$$

$$\frac{x^{\log 5x}}{x^{\log x}} = 125$$

$$\log \frac{x^{\log 5x}}{x^{\log x}} = \log 125$$

$$\log x^{\log 5x} - \log x^{\log x} = \log 125$$

$$\log 5x \times \log x - \log x \times \log x = \log 125$$

$$(\log 5 + \log x) \times \log x - \log x \times \log x = \log 125$$

$$\log 5 \times \log x + \log^2 x - \log^2 x = \log 125$$

$$\log 5 \times \log x = 3 \log 5$$

$$\log x = 3$$

$$x = 1000$$

2. **AMS (Algemeene Middelbare School) afd B, 1929**

Pada persamaan $3x^2 + Px + Q = 0$, dengan akar-akar x_1 dan x_2 , maka x_1 sama dengan y yang memenuhi kepada:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } {}^x \log y^x - {}^y \log x^y = 0 \\ \text{b) } \frac{1}{{}^{10} \log y} = {}^x \log 100 \end{array} \right\}$$

sedangkan $x_1 - x_2$ sama dengan limit jumlah dari deret ukur (deret geometri) yang tak berhingga:

$$\log 2, \log 2 \times \log 5, \log 2 \times (\log 5)^2, \dots \text{dst}$$

Hitunglah P dan Q .

Solusi:

$$\frac{1}{{}^{10} \log y} = {}^x \log 100$$

$$\frac{1}{{}^{10} \log y} = \frac{{}^{10} \log 100}{{}^{10} \log x}$$

$$\frac{{}^{10}\log x}{{}^{10}\log y} = 2$$

$${}^y\log x = 2 \dots (1)$$

$${}^x\log y^x - {}^y\log x^y = 0$$

$$x^x \log y = y^y \log x$$

$$\frac{x}{{}^y\log x} = y^y \log x$$

$$\frac{x}{2} = y \cdot 2$$

$$x = 4y \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$${}^y\log 4y = 2$$

$$y^2 = 4y$$

$$y^2 - 4y = 0$$

$$y(y - 4) = 0$$

$y = 0$ (ditolak, karena bilangan pokok logaritma $\neq 0$) atau $y = 4$ (diterima)

Karena $y = 4$, maka $x = 4$.

Deret ukur (deret geometri) yang tak berhingga: $\log 2 + \log 2 \times \log 5 + \log 2 \times (\log 5)^2 + \dots$, dengan

$$a = \log 2 \text{ dan } r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\log 2 \times \log 5}{\log 2} = \log 5.$$

$$x_1 - x_2 = S = \frac{a}{1 - r} = \frac{\log 2}{1 - \log 5} = \frac{\log 2}{\log 10 - \log 5} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

Kita mengetahui bahwa $x_1 = 4$, sehingga

$$4 - x_2 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1 = 4 \rightarrow 3x^2 + Px + Q = 0$$

$$3 \cdot 4^2 + P \cdot 4 + Q = 0$$

$$4P + Q = -48 \dots (3)$$

$$x_2 = 3 \rightarrow 3x^2 + Px + Q = 0$$

$$3 \cdot 3^2 + P \cdot 3 + Q = 0$$

$$3P + Q = -27 \dots (4)$$

Persamaan (3) – Persamaan (4) menghasilkan $P = -21$.

$$3(-21) + Q = -27$$

$$Q = 36$$

3. HBS (Hogere Burger School) NI, 1929

Carilah x pada $2x^{6\log x} + 42x^{\frac{1}{6}\log x} = 19$.

Solusi:

$$2x^{6 \log x} + 42x^{\frac{1}{6} \log x} = 19$$

$$2x^{6 \log x} + 42x^{\frac{\log x}{\log 6}} = 19$$

$$2x^{6 \log x} + 42x^{-\log 6} = 19$$

$$2x^{6 \log x} + 42x^{-6 \log x} = 19$$

$$2x^{6 \log x} + \frac{42}{x^{6 \log x}} = 19$$

Ambillah $x^{6 \log x} = y$, sehingga

$$2y + \frac{42}{y} = 19$$

$$2y^2 - 19y + 42 = 0$$

$$(2y - 7)(y - 6) = 0$$

$$y = 3,5 \text{ atau } y = 6$$

$$x^{6 \log x} = 3,5 \text{ atau } x^{6 \log x} = 6$$

$$\log x^{6 \log x} = \log 3,5 \text{ atau } \log x^{6 \log x} = \log 6$$

$$6 \log x \times \log x = \log 3,5 \text{ atau } 6 \log x \times \log x = \log 6$$

$$\frac{\log x}{\log 6} \times \log x = \log 3,5 \text{ atau } \frac{\log x}{\log 6} \times \log x = \log 6$$

$$(\log x)^2 = \log 6 \times \log 3,5 \text{ atau } (\log x)^2 = (\log 6)^2$$

$$\log x = \pm \sqrt{\log 6 \times \log 3,5} \text{ atau } \log x = \pm \log 6$$

Solusi dari persamaan $\log x = \pm \sqrt{\log 6 \times \log 3,5}$:

Ambillah $k = \sqrt{\log 6 \times \log 3,5}$, sehingga

$$\log k = \log \sqrt{\log 6 \times \log 3,5}$$

$$\log k = \frac{1}{2} \log (\log 6 \times \log 3,5) = \frac{1}{2} (\log \log 6 + \log \log 3,5) = \frac{1}{2} (\log 0,7782 + \log 0,5441)$$

$$= \frac{1}{2} (0,8911 - 1 + 0,7357 - 1) = \frac{1}{2} (-0,3732) = -0,1866 = 0,8134 - 1$$

$$k = 0,6507$$

$$\log x = \pm 0,6507$$

$$\log x = 0,6507 \rightarrow x_1 = 4,4740$$

$$\log x = -0,6507 = 0,3493 - 1 \rightarrow x_2 = 0,2235$$

Solusi dari persamaan $\log x = \pm \log 6$:

$$\log x = \log 6 \text{ atau } \log x = -\log 6 = \log \frac{1}{6}$$

$$x_3 = 6 \text{ atau } x_4 = \frac{1}{6}$$

4. HBS (Hogere Burger School) Nederlan, 1929

Hitunglah p , q , dan r kalau diketahui bahwa:

- a. p adalah suku ke enam pada sebuah deret hitung (deret aritmetika) dengan $d_n = \frac{1}{3}n(n+1)$ dalam rumus ini d_n merupakan jumlah n suku pertama.
- b. $q = {}^5\log \frac{1}{25} - {}^7\log 81 \times {}^3\log 7 - {}^8\log 0,01$, dengan $g = \sqrt[3]{0,1}$.
- c. r dapat ditemukan dari persamaan kuadrat $16x^2 + 3x + r = 0$, kalau diketahui bahwa akar-akar persamaan ini yang satu menjadi kebalikannya dari yang kedua.
Isikanlah selanjutnya harga-harga p , q , dan r yang telah diketemukan itu ke dalam persamaan $px^2 + qx + r = 0$. Kalau x_1 dan x_2 menjadi akar-akar dari persamaan yang terjadi karena pengisian ini, bentuklah sebuah persamaan kuadrat yang baru yang kedua akar-akarnya masing-masing menjadi sebesar $x_1^3 + 2$ dan $x_2^3 + 2$, dengan tiada menghitung x_1 dan x_2 lebih dahulu.

Solusi:

a. $u_n = d_n - d_{n-1}$

$$u_6 = d_6 - d_5 = \frac{1}{3} \times 6 \times (6+1) - \frac{1}{3} \times 5 \times (5+1) = 14 - 10 = 4 = p$$

b. $q = {}^5\log \frac{1}{25} - {}^7\log 81 \times {}^3\log 7 - {}^8\log 0,01$

$$q = {}^5\log 5^{-2} - {}^3\log 7 \times {}^7\log 81 - {}^{10^{\frac{1}{3}}}\log 10^{-2} = -2 - {}^3\log 81 - \frac{-2}{-\frac{1}{3}} = -2 - 4 - 6 = -12$$

c. $16x^2 + 3x + r = 0$

$$x_1 x_2 = 1$$

$$\frac{r}{16} = 1$$

$$r = 16$$

$$px^2 + qx + r = 0$$

$$4x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0, \text{ dengan akar-akarnya } x_1 \text{ dan } x_2.$$

$$JAA = x_1^3 + 2 + x_2^3 + 2 = x_1^3 + x_2^3 + 4 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4$$

$$= \left(-\frac{-3}{1}\right)^3 - 3 \times \frac{4}{1} \times \left(-\frac{-3}{1}\right) + 4 = 27 - 36 + 4 = -5$$

$$HKA = (x_1^3 + 2)(x_2^3 + 2) = x_1^3 x_2^3 + 2(x_1^3 + x_2^3) + 4$$

$$= (x_1 x_2)^3 + 2[(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4] + 4$$

$$= \left(\frac{4}{1}\right)^3 + 2\left[\left(-\frac{-3}{1}\right)^3 - 3 \times \frac{4}{1} \times \left(-\frac{-3}{1}\right)\right] + 4 = 64 + 2(27 - 36) + 4 = 68 - 18 = 50$$

Jadi, persamaan kuadrat yang diminta adalah

$$x^2 - (JAA)x + HKA = 0$$

$$x^2 + 5x + 50 = 0$$

Bersambung