

Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Awal Masa Kemerdekaan
UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS
TAHUN 1951

1. SMA bg. B, 1951

Hitunglah x dengan tidak mempergunakan daftar laogaritma dari:

$${}^3\log\left(27^{\log x}\right) = p \text{ jika } p \text{ adalah akar dari persamaan } 2^{p-4} - 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{p-5}} = 0.$$

Jika p tidak dapat diketemukan dari persamaan yang kedua, maka selesaikanlah persamaan ke satu dengan member kepada p nilai 12.

Solusi:

$$2^{p-4} - 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{p-5}} = 0$$

$$2^{p-4} - 3\frac{1}{2} - \frac{2}{2^{p-4}} = 0$$

Ambillah $2^{p-4} = y$, sehingga

$$y - 3\frac{1}{2} - \frac{2}{y} = 0$$

$$2y^2 - 7y - 4 = 0$$

$$(2y+1)(y-4) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2} \vee y = 4$$

$$2^{p-4} = -\frac{1}{2} \text{ (ditolak)} \vee 2^{p-4} = 4 \text{ (diterima)}$$

$$2^{p-4} = 2^2$$

$$p - 4 = 2$$

$$p = 6$$

$$p = 6 \rightarrow {}^3\log\left(27^{\log x}\right) = p$$

$${}^3\log\left(3^{\log x}\right)^3 = 6$$

$$27^{\log x} = 3^6$$

$$3^{3\log x} = 3^6$$

$$3^{\log x} = 3^2$$

$${}^9\log x = 2$$

$$x = 81$$

Jika nilai $p = 12$, maka

$${}^3\log\left(27^{\log x}\right) = 12$$

$$27^{\log x} = 3^{12}$$

$$3^{3\log x} = 3^{12}$$

$$3^{\log x} = 3^4$$

$${}^9\log x = 4$$

$$x = 6561$$

2. SMA bg. B, 1951

Dari besaran A , B , dan C dari persamaan pangkat dua $Ax^2 + Bx + C = 0$, diketahui:

Ke 1. A dan B adalah suku-suku pertama dan kedua dari deret ukur naik yang mempunyai perbandingan (reden) positif. Dari deret itu selanjutnya diketahui bahwa:

Suku yang ke $(p+2) = 4374$ dan suku yang ke $(p-2) = 54$, sedangkan jumlah $(p-1)$ suku yang pertama sama dengan 242.

Ke 2. Nilai C adalah demikian, sehingga akar-akar persamaan itu saling menjadi kebalikannya.

Ditanyakan:

- rupa yang sebenarnya dari persamaan pangkat dua itu.
- Jika akar-akar persamaan itu dinamakan x_1 dan x_2 , maka buatlah persamaan pangkat dua baru yang akar-akarnya $2x_1 - \sqrt{5}$ dan $2x_2 - \sqrt{5}$.

Solusi:

$$\text{a. } \frac{u_{p+2}}{u_{p-2}} = \frac{ar^{p+1}}{ar^{p-3}} = r^4 = \frac{4374}{54} = 81$$

$$r = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$$

Karena deret ukur naik, maka $r = 3$.

$$u_{p-2} = ar^{p-3} = a \cdot 3^{p-3} = 54$$

$$\frac{3^{p-1}}{9} = \frac{54}{a}$$

$$3^{p-1} = \frac{486}{a}$$

$$S_{p-1} = \frac{a(r^{p-1} - 1)}{r - 1} = \frac{a(3^{p-1} - 1)}{3 - 1} = 242$$

$$a\left(\frac{486}{a} - 1\right) = 484$$

$$486 - a = 484$$

$$a = 486 - 484 = 2$$

$$A = u_1 = a = 2$$

$$B = u_2 = ar = 2 \cdot 3 = 6$$

$$x_1 x_2 = 1$$

$$\frac{C}{A} = 1$$

$$C = A = 2$$

Jadi, persamaan kuadrat tersebut adalah $2x^2 + 6x + 2 = 0$.

$$\text{b. } JAA = 2x_1 - \sqrt{5} + 2x_2 - \sqrt{5} = 2(x_1 + x_2) - 2\sqrt{5} = 2\left(-\frac{6}{2}\right) - 2\sqrt{5} = -6 - 2\sqrt{5}$$

$$HKA = (2x_1 - \sqrt{5})(2x_2 - \sqrt{5}) = 4x_1x_2 - (x_1 + x_2)2\sqrt{5} + 5 = 4 \cdot \frac{2}{2} - \left(-\frac{6}{2}\right)2\sqrt{5} + 5 = 9 + 6\sqrt{5}$$

Persamaan kuadratnya adalah

$$x^2 - (JAA)x + HKA = 0$$

$$x^2 - (-6 - 2\sqrt{5})x + 9 + 6\sqrt{5} = 0$$

$$x^2 + 6 + 2\sqrt{5}x + 9 + 6\sqrt{5} = 0$$

3. SMA bg. B, 1951

Ditentukan fungsi-fungsi:

$$y = px^2 - x + 1 \quad (\text{A})$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (\text{B})$$

Jika dari fungsi-fungsi ini dilukis grafik-grafiknya pada susunan sumbu tegak lurus XOY, maka nyatalah bahwa sumbu-sumbu itu merupakan asytmot-asytmot dari grafik fungsi (B) dan bahwa kedua grafik saling memotong di titik $P(1,1)$.

Ditanyakan:

1. menghitung a dan d dan perhubungan antara b dan c .
2. membuktikan bahwa kedua grafik tidak mempunyai titik potong lain dari pada P .
3. menyusun persamaan garis singgung pada (A) di titik P .
4. menyusun persamaan garis singgung pada (B) di titik P .
5. menggambar kedua grafik dengan garis singgung-garis singgungnya dalam lukisan yang terang.

Solusi:

$$1. \quad P(1,1) \rightarrow y = px^2 - x + 1$$

$$1 = p \cdot 1^2 - 1 + 1$$

$$p = 1$$

$$\therefore y = x^2 - x + 1$$

Karena sumbu X dan sumbu Y berperan sebagai asytmot-asytmot grafik fungsi $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, maka

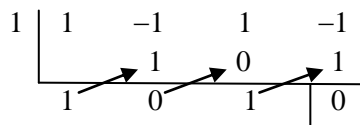
haruslah $a = 0, d = 0, \text{ dan } b = c$, sehingga grafik (B) menjadi $y = \frac{1}{x}$.

$$2. \quad \text{Menentukan koordinat titik potong grafik-grafik } y = x^2 - x + 1 \text{ dan } y = \frac{1}{x}.$$

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{x}$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+1) = 0$$



Hanya dipenuhi oleh $x = 1$, sehingga $y = \frac{1}{1} = 1$.

Jelaslah bahwa kedua grafik tidak mempunyai titik potong lain dari pada P . (terbukti)

$$3. \quad \text{Ambillah persamaan garis singgungnya adalah } y = mx + n.$$

$$P(1,1) \rightarrow y = mx + n$$

$$1 = m \cdot 1 + n$$

$$n = 1 - m$$

Persamaan garis singgung itu menjadi $y = mx + 1 - m$.

$$x^2 - x + 1 = mx + 1 - m$$

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$

Syarat garis menyinggung parabola adalah $D = b^2 - 4ac = 0$, sehingga

$$[-(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 4m = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)^2 = 0$$

$$m = 1$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = 1 \cdot x + 1 - 1 = x$.

Kita dapat menyelesaikan soal ini sebagai berikut.

$$y = x^2 - x + 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$y = x$$

4. Ambillah persamaan garis singgungnya adalah $y = mx + n$.

$$P(1,1) \rightarrow y = mx + n$$

$$1 = m \cdot 1 + n$$

$$n = 1 - m$$

Persamaan garis singgung itu menjadi $y = mx + 1 - m$.

$$\frac{1}{x} = mx + 1 - m$$

$$mx^2 + (1 - m)x - 1 = 0$$

Syarat garis menyinggung parabola adalah $D = b^2 - 4ac = 0$, sehingga

$$(1 - m)^2 - 4 \cdot m \cdot (-1) = 0$$

$$1 - 2m + m^2 + 4m = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m = -1$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = -1 \cdot x + 1 - (-1) = -x + 2$.

Kita dapat menyelesaikan soal ini sebagai berikut.

$$y = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

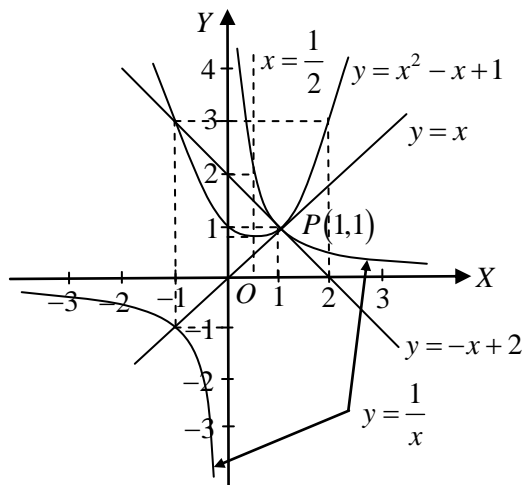
$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 2$$

5. Sketsa grafik fungsi $y = x^2 - x + 1$ dan $y = \frac{1}{x}$ serta garis singgung-garis singgung $y = x$ dan $y = -x + 2$.



Bersambung