Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Awal Masa Kemerdekaan

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1949

ALJABAR

1. **AMS (Algemeene Middelbare School)-HBS (Hogere Burger School), 1949**

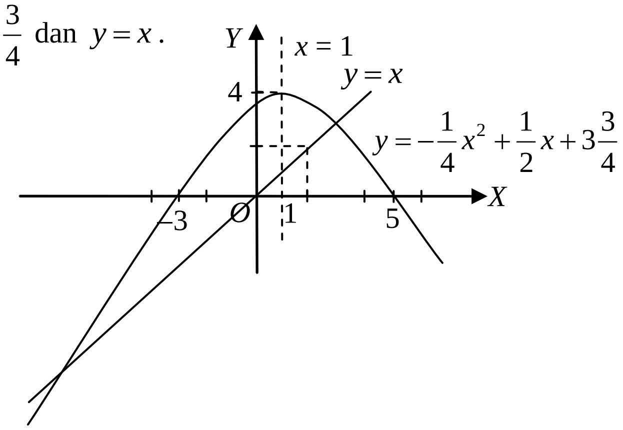
   Ditentukan fungsi-fungsi: $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\frac{3}{4}$ dan $y=x$.

   a. Gambarkanlah grafik fungsi-fungsi ini dalam sebuah sistem salib sumbu. Tentukan koordinat titik potong kedua grafik itu.

   b. Dalam bidang yang dibatasi kedua grafik itu dibuat garis-garis yang sejajar sumbu Y yang menghubungkan sebuah titik dari fungsi pertama dan sebuah titik fungsi yang lain. Tentukan panjang yang terbesar di antara garis-garis itu.

   Solusi:

   a. Gambar grafik-grafik $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\frac{3}{4}$ dan $y=x$.



$$y=x \rightarrow y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\frac{3}{4}$$

$$x=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\frac{3}{4}$$

$$4x=-x^2+2x+15$$

$$x^2+2x-15=0$$

$$(x+5)(x-3)=0$$

$$x=-5 \text{ atau } x=3$$

   Jadi, koordinat titik potongnya adalah $(-5,0)$ dan $(3,0)$.

   b. Ambillah titik (p,q) yang terletak pada grafik $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\frac{3}{4}$, sehingga $(p,q)=\left(p,-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+3\frac{3}{4}\right)$ dan titik $(q,q)=\left(-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+3\frac{3}{4},-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+3\frac{3}{4}\right)$ terletak pada garis $y=x$. Maka dari itu, jarak kedua titik ini adalah

$$d=\sqrt{(q-p)^2+(q-q)^2}=q-p=-\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{2}p+3\frac{3}{4}-p=-\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p+3\frac{3}{4}$$

$$p=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{4}\right)}=-1$$

$$d_{\text{maks}}=-\frac{1}{4}(-1)^2-\frac{1}{2}(-1)+3\frac{3}{4}=4$$

2. **HBS (Hogere Burger School)-AMS (Algemeene Middelbare School), 1949**

   Diketahui persamaan persegi:

$$x^2-(3+2\log p)x+(\log p)^2+3\log p=0$$

Bilangan pokok logaritma = 2.

a. Tentukan akar-akar persamaan ini sebagai fungsi dari *p*. Carilah akar-akar itu samapai 2 angka di belakang koma, apabila $p=\frac{1}{2}$.

b. Carilah akar-akar itu apabila diketahui bahwa akar-akar itu kebalikan masing-masing.

c. Bagi harga-harga yang mana dari *p* hasilkali akar-akar itu lebih besar dari *p*.

Solusi:

a. $x^2-\left(3+2\,{}^2\log p\right)x+\left({}^2\log p\right)^2+3\,{}^2\log p=0$

$$x=\frac{\left(3+2\,{}^2\log p\right)\pm\sqrt{\left[-\left(3+2\,{}^2\log p\right)\right]^2-4\cdot 1\cdot\left[\left({}^2\log p\right)^2+3\,{}^2\log p\right]}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{\left(3+2\,{}^2\log p\right)\pm\sqrt{9+12\,{}^2\log p+4\left({}^2\log p\right)^2-4\left({}^2\log p\right)^2-12\,{}^2\log p}}{2}$$

$$x=\frac{\left(3+2\,{}^2\log p\right)\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{\left(3+2\,{}^2\log p\right)\pm 3}{2}$$

$$x=\frac{\left(3+2\,{}^2\log p\right)+3}{2}=3+{}^2\log p \text{ atau } x=\frac{\left(3+2\,{}^2\log p\right)-3}{2}={}^2\log p$$

$$p=\frac{1}{2}\to x=3+{}^2\log\frac{1}{2}=3-1=2 \text{ atau } x={}^2\log\frac{1}{2}=-1$$

b. $x_1=\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow x_1x_2=1\Leftrightarrow\frac{c}{a}=1\Leftrightarrow a=c$

$$\left({}^2\log p\right)^2+3\,{}^2\log p=1$$

$$\left({}^2\log p\right)^2+3\,{}^2\log p-1=0$$

$${}^2\log p=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

$${}^2\log p=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\vee{}^2\log p=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

$$p=2^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}\vee p=2^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}}$$

Jika $p=2^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$, maka akar-akarnya adalah

$$x=3+{}^2\log p=3+{}^2\log 2^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}=3+\frac{-3+\sqrt{13}}{2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ atau}$$

$$x={}^2\log p={}^2\log 2^{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$$

Jika $p = 2^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}}$, maka akar-akarnya adalah

$$x = 3 + {}^2\log p = 3 + {}^2\log 2^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}} = 3 + \frac{-3-\sqrt{13}}{2} = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \quad \text{atau}$$

$$x = {}^2\log p = {}^2\log 2^{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}} = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$$

c. $x_1 x_2 > p$

$\left({}^2\log p\right)^2 + 3\,{}^2\log p > p$?

3. **HBS (Hogere Burger School)-AMS (Algemeene Middelbare School), 1949**

Apabila suku-suku sesuatu deret ukur yang turun tak berhingga bsemua diberi pangkat dua, maka limit jumlah suku-suku *n* pertama tetap tidak berubah, apabila *n* bertambah dengan tak terbatas. Apabila semua suku-suku deret pertama diberi pangkat 3, maka limit tersebut menjadi $\frac{9}{7}$ kali sebesar mula-mula. Tentukan deret yang pertama. Untuk harga mana dari *n* hasilbagi jumlah *n* suku-suku pertama dari deret yang kedua dan jumlah *n* suku-suku deret yang pertama lebih kecil dari 1,000001?

Solusi:

Deret ukur (deret geometri) pertama: $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots \to S_1 = \frac{a}{1-r}$

Deret ukur (deret geometri) kedua: $a^2 + (ar)^2 + \left(ar^2\right)^2 + \left(ar^3\right)^2 + \ldots \to S_2 = \frac{a^2}{1-r^2}$

Deret ukur (deret geometri) ketiga: $a^3 + (ar)^3 + \left(ar^2\right)^3 + \left(ar^3\right)^3 + \ldots \to S_3 = \frac{a^3}{1-r^3}$

$$S_2 = S_1$$

$$\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{a}{1+r} = 1$$

$$a = 1 + r \;\ldots.\; (1)$$

$$S_3 = \frac{9}{7} S_1$$

$$\frac{a^3}{1-r^3} = \frac{9}{7} \times \frac{a}{1-r}$$

$$\frac{a^2}{1+r+r^2} = \frac{9}{7} \;\ldots.\; (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{(1+r)^2}{1+r+r^2} = \frac{9}{7}$$

$$7 + 14r + 7r^2 = 9 + 9r + 9r^2$$

$$2r^2 - 5r + 2 = 0$$

$$(2r-1)(r-2) = 0$$

$r=\frac{1}{2}$ (diterima) atau $r=2$ (ditolak)

$a=1+r=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Jadi, deret ukur yang pertama adalah $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+...$

$$\frac{S_{n2}}{S_{n1}}<1,000001$$

$$\frac{\frac{a^2\left(1-r^{2n}\right)}{1-r^2}}{\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}}<1,000001$$

$$\frac{1-r}{a\left(1-r^n\right)}\times\frac{a^2\left(1-r^{2n}\right)}{1-r^2}<1,000001$$

$$\frac{1-r}{a\left(1-r^n\right)}\times\frac{a^2\left(1+r^n\right)\left(1-r^n\right)}{\left(1+r\right)\left(1-r\right)}<1,000001$$

$$\frac{a\left(1+r^n\right)}{\left(1+r\right)}<1,000001$$

$$\frac{1,5\left[1+\left(0,5\right)^n\right]}{1+0,5}<1,000001$$

$$1+\left(0,5\right)^n<1,000001$$

$$\left(0,5\right)^n>0,000001$$

$$\log\left(0,5\right)^n>\log 0,000001$$

$$n\log 0,5>\log 10^{-6}$$

$$n>\frac{\log 10^{-6}}{\log 0,5}$$

$$n>\frac{-6}{-0,3010}$$

$$n>\frac{6}{0,3010}$$

$$\log n>\log\frac{6}{0,3010}$$

$$\log n>\log 6-\log 0,3010$$

$$\log n>0,7782-\left(0,4786-1\right)$$

$$\log n>1,2996$$

$$n>19,9343$$

$$n>20$$

4. **SMA 1949**

Ditentukan: $mx^2-(3m+1)x+2(m+1)=0$.

a. Berapakah harga-harga *m* supaya akar-akar persamaan ini yang satu lebih kecil dari satu akan tetapi yang lain lebih besar dari satu?

b. Hitunglah harga *m* supaya akar-akar persamaan ini yang satu dan yang lain berbanding 3 : 4.

Solusi:

a. Ambilah akar-akar persamaan tersebut adalah x_1 dan x_2, dengan $x_1<1$ dan $x_2>1$.

Syarat yang cukup dan diperlukan adalah

(1) Mempunyai dua akar berlainan, sehingga $D>0$.

$$\left[-(3m+1)\right]^2-4\cdot m\cdot 2(m+1)>0$$

$$9m^2+6m+1-8m^2-8m>0$$

$$m^2-2m+1>0$$

$$(m-1)^2>0$$

Ini berlaku untuk setiap nilai m.

(2) $x_1-1<0$ dan $x_2-1>0$

$$(x_1-1)(x_2-1)<0$$

$$x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$$

$$\frac{2(m+1)}{m}-\frac{(3m+1)}{m}+1<0$$

$$\frac{-m+1+m}{m}<0$$

$$\frac{1}{m}<0$$

$$m<0$$

b. $x_1:x_2=3:4$

$$x_1=\frac{3}{4}x_2$$

$$x_1+x_2=-\frac{-(3m+1)}{m}$$

$$\frac{3}{4}x_2+x_2=\frac{3m+1}{m}$$

$$\frac{7}{4}x_2=\frac{3m+1}{m}$$

$$x_2=\frac{4(3m+1)}{7m}$$

$$x_1=\frac{3}{4}\times\frac{4(3m+1)}{7m}=\frac{3(3m+1)}{7m}$$

$$x_1x_2=\frac{2(m+1)}{m}$$

$$\frac{3(3m+1)}{7m}\times\frac{4(3m+1)}{7m}=\frac{2(m+1)}{m}$$

$$\frac{6(3m+1)^2}{49m^2}=\frac{m+1}{m}$$

$$6(3m+1)^2=49m(m+1)$$

$$54m^2+36m+6=49m^2+49m$$

$$5m^2-13m+6=0$$

$$(5m-3)(m-2)=0$$

$$m=\frac{3}{5}\text{ atau } m=2$$

5. **SMA Djakarta, 1949**

Ditentukan fungsi $y=2mx^2+(3m-1)x-5m+1$, di mana m sebuah parameter yang variabel, sehingga persamaan ini menggambarkan parabola-parabola yang tak terhingga banyaknya.

a. Buktikan bahwa semua parabola ini melalui 2 titik yang tertentu.

b. Titik-titik manakah ini?

c. Buat harga m yangmana fungsi ini digambarkan oleh grafik yang sumbu simetrinya garis $x=-1$?

Solusi:

a. $D=(3m-1)^2-4\cdot 2m\cdot(-5m+1)$

$$D=9m^2-6m+1+40m^2-8m$$

$$D=49m^2-14m+1$$

$$D=(7m-1)^2$$

Karena $D>0$, maka parabola melalui dua titik berlainan.

b. $y=2mx^2+(3m-1)x-5m+1$

$$2mx^2+(3m-1)x-5m+1=0$$

$$x=\frac{-3m+1\pm\sqrt{(7m-1)^2}}{4m}=\frac{-3m+1\pm(7m-1)}{4m}$$

$$x=\frac{-3m+1+7m-1}{4m}=\frac{4m}{4m}=1\text{ atau } x=\frac{-3m+1-7m+1}{4m}=\frac{-10m+2}{4m}=\frac{-5m+1}{2m}$$

Jadi, titik-titik tersebut adalah $(1,0)$ dan $\left(\frac{-5m+1}{2m},0\right)$

c. $y=2mx^2+(3m-1)x-5m+1$

$$x=-\frac{(3m-1)}{4m}=-1$$

$$3m-1=4m$$

$$m=-1$$

6. **SMA, 1949**

Tentang sebuah fungsi rasional yang berpangkat empat, ditentukan bahwa buat harga $x=-2$ fungsi itu mendapat harga -5. Buat semua harga x lain yang nyata fungsi itu mempunyai harga yang lebih besar dari -5. Apabila fungsi itu dibagi dengan $x+1$, maka sisanya -3. Dan dibagi $x-1$ maka sisanya 49. Kalau $x-2$ dibagi sisanya 171. Carilah fungsi yang dimaksud di atas.

Solusi:

Ambillah fungsi rasional yang berpangkat empat adalah $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

$f(-2)=16a-8b+4c-2d+e=-5$ .... (1)

$f(-1)=a-b+c-d+e=-3$ .... (2)

$f(1)=a+b+c+d+e=49$ .... (3)

$f(2)=16a+8b+4c+2d+e=171$ .... (4)

Persamaan (1) – Persamaan (2): $15a-7b+3c-d=-2$ .... (5)

Persamaan (1) – Persamaan (3): $15a-9b+3c-3d=-54$ .... (6)

Persamaan (1) – Persamaan (4): $-16b-4d=-176 \Leftrightarrow 4b+d=44$ .... (7)

Persamaan (2) – Persamaan (3): $-2b-2d=-52 \Leftrightarrow b+d=26$ .... (8)

Persamaan (7) – Persamaan (8): $3b=18 \Leftrightarrow b=6$

$6+d=26 \Leftrightarrow d=20$

Substitusikan $b=6$ dan $d=20$ ke persamaan (5), sehingga $15a+3c=60 \Leftrightarrow 5a+c=20$ .... (9)

Dari soal diketahui bahwa buat harga $x=-2$ fungsi itu mendapat harga -5, ini adalah nilai minimum, sehingga:

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f'(-2)=-32a+12b-4c+d=0$ .... (10)

Substitusikan $b=6$ dan $d=20$ ke persamaan (10) sehingga

$-32a+72-4c+20=0$

$-32a-4c=-92$

$8a+c=23$ .... (11)

Persamaan (9) – Persamaan (11) menghasilkan: $-3a=-3 \Leftrightarrow a=1$, sehingga

$8\cdot 1+c=23$

$c=15$

Substitusikan $a=1$, $b=6$, $c=15$, dan $d=20$ ke persamaan (3) sehingga

$1+6+15+20+e=49$

$e=7$

Jadi, suku banyak itu adalah $f(x)=x^4+6x^3+15x^2+20x+7$

Bersambung