Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Awal Masa Kemerdekaan

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1948

ALJABAR

1. **SMA 1948**

Ditentukan persamaan tingkat dua: $mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3 = 0$.

a. Berapakah harga *m* supaya persamaan itu mempunyai dua akar positif yang sama?

b. Berapakah harga *m* supaya akar-akar persamaan itu berbalikan?

Pandanglah sekarang fungsi $y = mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3$ .... (1)

c. Gantilah *m* dengan harga-harga yang terdapat pada pertanyaan a dan b, lalu gambarkan grafik kedua fungsi itu bersama-sama pada satu pasang salib sumbu.

d. Tentukanlah dengan perhitungan di mana kedua garis lengkung itu berpotongan.

e. Buktikan bahwa grafik fungsi (1) untuk sebarang harga *m*, melalui titik-titik yang telah ditentukan pada d.

Solusi:

a. $mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3 = 0$

Syarat akar-akarnya positif dan sama adalah $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$, dan $D = b^2 - 4ac = 0$.

$x_1 + x_2 > 0$

$-\frac{-(7m-1)}{m} > 0$

$\frac{7m-1}{m} > 0$

$m < 0$ atau $m > \frac{1}{7}$ .... (1)

$x_1 x_2 > 0$

$\frac{6m+3}{m} > 0$

$m < -\frac{1}{2}$ atau $m > 0$ .... (2)

$D = b^2 - 4ac = 0$

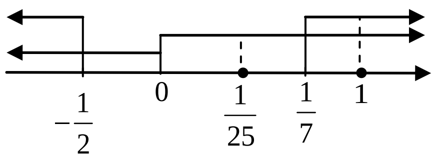
$\left[-(7m-1)\right]^2 - 4 \cdot m \cdot (6m+3) = 0$

$49m^2 - 14m + 1 - 24m^2 - 12m = 0$

$25m^2 - 26m + 1 = 0$

$(25m-1)(m-1) = 0$

$m = \frac{1}{25}$ atau $m = 1$ .... (3)



Dari (1) ∩ (2) ∩ (3), diperoleh $m = 1$.

b. $x_2 = \frac{1}{x_1}$

$x_1 x_2 = 1$

$\frac{6m+3}{m} = 1$

$6m + 3 = m$

$5m = -3$

$m = -\frac{3}{5}$

c. $m = 1 \rightarrow y = mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3$

$y = x^2 - (7 \cdot 1 - 1)x + 6 \cdot 1 + 3$

$y = x^2 - 6x + 9$

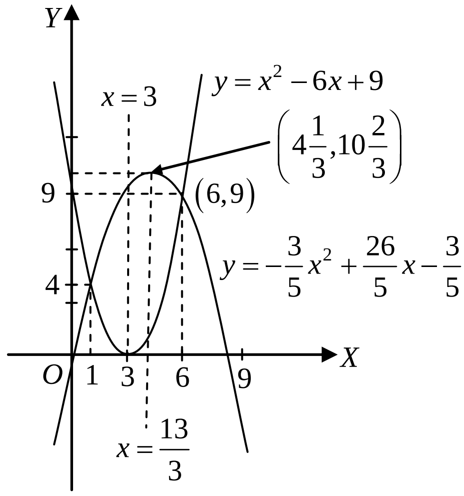
$y = (x-3)^2$

$m = -\frac{3}{5} \rightarrow y = mx^2 - (7m-1)x + 6m + 3$

$y = -\frac{3}{5}x^2 - \left(-\frac{21}{5} - 1\right)x - \frac{18}{5} + 3$

$y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{26}{5}x - \frac{3}{5}$

$y = \frac{1}{5}\left(-3x^2 + 26x - 3\right)$



d. $y = x^2 - 6x + 9$ dan $y = \frac{1}{5}\left(-3x^2 + 26x - 3\right)$

$x^2 - 6x + 9 = \frac{1}{5}\left(-3x^2 + 26x - 3\right)$

$5x^2 - 30x + 45 = -3x^2 + 26x - 3$

$8x^2 - 56x + 48 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$(x-1)(x-6) = 0$

$x = 1$ atau $x = 6$

$x = 1 \rightarrow y = x^2 - 6x + 9$

$y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 9 = 4 \Rightarrow (1,4)$

$x = 6 \rightarrow y = x^2 - 6x + 9$

$y = 6^2 - 6 \cdot 6 + 9 = 4 \Rightarrow (6,9)$

2. **HBS (Hogere Burger School)-AMS (Algemeene Middelbare School) 1948**

Ditentukan sebuah fungsi: $y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$, di mana *y* ditentukan sebagai fungsi dari x buat setiap harga *m*. Kita tinjau hanya harga-harga *m* yang nyata, dan andaikan grafik-grafik semua fungsi-fungsi itu terlukis pada sebuah salib sumbu.

a. Gambarkan grafik itu, kalau ditentukan bahwa grafik itu melalui titik $(1,5)$.

b. Buktikan bahwa buat segala harga *m*, grafik itu motong sumbu *X* di dua titik yang berlainan.

c. Buat harga *m* yang mana jarak kedua titik ini sebesar-besarnya.

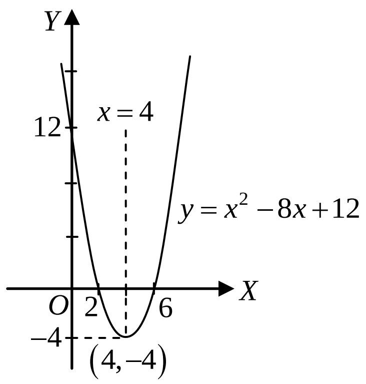
Solusi:

a. $(1,5) \to y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$

$$5 = 1^2 - (m+5)\cdot 1 + 3m + 3$$
$$5 = 1 - m - 5 + 3m + 3$$
$$2m = 6$$
$$m = 3$$

$m = 3 \to y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$

$$y = x^2 - 8x + 12$$
$$y = (x-2)(x-6)$$



b. $x^2 - (m+5)x + 3m + 3 = 0$

$D = [-(m+5)]^2 - 4\cdot 1\cdot(3m+3) = m^2 + 10m + 25 - 12m - 12 = m^2 - 2m + 13 = (m-1)^2 + 12$

Karena untuk setiap *m* real, maka $D > 0$, sehingga jelas bahwa grafik itu motong sumbu *X* di dua titik yang berlainan.

c. Ambillah titik-titik potong grafik fungsi $y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$ dengan sumbu X adalah $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(m+5)^2 - 4(3m+3)}$

$= \sqrt{m^2 + 10m + 25 - 12m - 12} = \sqrt{m^2 - 2m + 13}$

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$

$d_{\text{maks}} = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 13} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3. **AMS (Algemeene Middelbare School)-HBS (Hogere Burger School) 1948**

Ditentukan $y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$. Ditanyakan

a. Gambarkan grafik fungsi ini, apabila ditentukan bahwa grafik itu melalui titik $(1,5)$.

b. Buat setiap harga *m* fungsi itu digambarkan oleh sebuah parabola, sehingga tak terhingga banyaknya parabola-parabola itu. Buktikan bahwa semua parabola-parabola itu terpotong oleh sumbu *X* di dua titik yang berlainan.

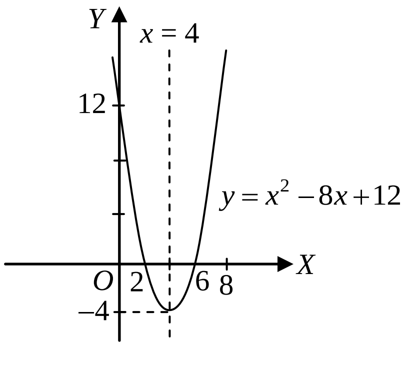
c. Buat harga *m* yang mana jarak kedua titik itu sekecil-kecilnya?

Solusi:

a. $(1,5) \to y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$

$$5 = 1^2 - (m+5)\cdot 1 + 3m + 3$$
$$5 = 1 - m - 5 + 3m + 3$$
$$2m = 6$$
$$m = 3$$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $y = x^2 - 8x + 12$.



b. Grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$ akan memotong sumbu X di dua titik berlainan, jika $D = b^2 - 4ac > 0$, sehingga

$\left[-(m+5)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3m+3) > 0$

$m^2 + 10m + 25 - 12m - 12 > 0$

$m^2 - 2m + 13 > 0$

$(m-1)^2 + 12 > 0$

Karenanya grafik fungsi kuadrat tersebut selalu memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.

c. Agar jarak dua titik potong grafik fungsi $y = x^2 - (m+5)x + 3m + 3$ sekecil-kecilnya, maka haruslah nilai $m = -1$.

4. **SMA 1948**

Suatu deret ukur mempunyai 4 suku $t_1, t_2, t_3, \text{dan}\, t_4$. Jumlahnya 255. Di antara $t_1 \,\text{dan}\, t_2$ disisipkan 2 suku sehingga 4 suku ini menjadi deret hitung. Di antara $t_2 \,\text{dan}\, t_3$ disisipkan 2 suku pula sehingga 4 suku ini menjadi deret hitung. Demikian juga dengan $t_3 \,\text{dan}\, t_4$. Jumlah suku-suku baru dan lama 975. Carilah deret ukur itu.

Solusi:

$t_1 = a, t_2 = ar, t_3 = ar^2, \text{dan}\, t_4 = ar^3$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

$$255 = \frac{a\left(r^4 - 1\right)}{r-1}$$

$$255 = a\left(r^2+1\right)(r+1)$$

$$255 = a\left(r^3 + r^2 + r + 1\right)$$

$$255 = ar^3 + ar^2 + ar + a \;.... (1)$$

$$S_{n'} = \frac{n'}{2}\left(a + t_n\right) = 975$$

$$\frac{10}{2}\left(t_1 + t_4\right) = 975$$

$$t_1 + t_4 = 195$$

$$a + ar^3 = 195$$

$$a = \frac{195}{r^3+1} \;.... (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$255 = \left(ar^3 + a\right) + ar^2 + ar$$

$$255 = 195 + ar^2 + ar$$

$$60 = ar(r+1)$$

$$60 = \frac{195r}{r^3+1}(r+1)$$

$$60=\frac{195r}{r^2-r+1}$$

$$60r^2-60r+60=195r$$

$$60r^2-255r+60=0$$

$$4r^2-17r+4=0$$

$$(4r-1)(r-4)=0$$

$r=\frac{1}{4}$ (diterima) atau $r=4$ (ditolak)

$$r=\frac{1}{4}\to a=\frac{195}{\left(\frac{1}{4}\right)^3+1}=192$$

$$r=4\to a=\frac{195}{4^3+1}=3$$

Jadi, deret ukur tersebut adalah 192, 48, 12, 3 atau 3, 12, 48, 192.

5. **SMA 1948**

Ditentukan: $a^{{}^a\log y}+\frac{\log^2 2-\log^2 5}{\log\sqrt{0,4}}=\frac{x^{{}^2\log 4x}}{x^{{}^2\log x}}$

$$a^{{}^a\log(\log x)}-{}^b\log\frac{1}{y^{\log b}}=0$$

a. Katakan dalam kedua persamaan itu y sebagi fungsi dari x. Hitunglah selanjutnya x dan y dari kedua persamaan itu.
b. Jelaskan pendapatan-pendapatan itu dengan grafik.

Solusi:

a. $a^{{}^a\log y}+\frac{\log^2 2-\log^2 5}{\log\sqrt{0,4}}=\frac{x^{{}^2\log 4x}}{x^{{}^2\log x}}$

$$y+\frac{(\log 2-\log 5)(\log 2+\log 5)}{\log\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}=x^{{}^2\log 4x-{}^2\log x}$$

$$y+\frac{\left(\log\frac{2}{5}\right)(\log 10)}{\frac{1}{2}\log\frac{2}{5}}=x^{{}^2\log 4x-{}^2\log x}$$

$$y+2=x^{{}^2\log 4}$$

$$y=x^2-2\ \ldots.\ (1)$$

$$a^{{}^a\log(\log x)}-{}^b\log\frac{1}{y^{\log b}}=0$$

$$\log x-\log b\times{}^b\log\frac{1}{y}=0$$

$$\log x-\log\frac{1}{y}=0$$

$$\log xy=0$$

$$xy = 1$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$x^2 - 2 = \frac{1}{x}$$

$$x^3 - 2x - 1 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

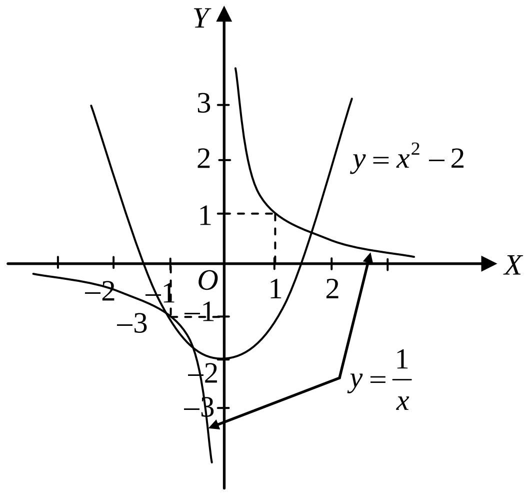
$$x = -1 \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = -1 \to y = \frac{1}{-1} = -1$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \to y = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$$

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \to y = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

b. Sketsa grafik $y = x^2 - 2$ dan $y = \frac{1}{x}$



6. **HBS (Hogere Burger School)-AMS (Algemeene Middelbare School), 1948**

Ditentukan persamaan:

$3^{2x} - 8 \cdot 3^x + a + 8 = 0$ .... (1)

a. Hitunglah akar-akar persamaan itu buat $a = -1$ dan $a = -17$.

b. Buat harga-harga a yang mana persamaan (1) ini mempunyai satu akar berserikat dengan persamaan:

$3^{2x} + 3^x - 2a + 2 = 0$

c. Buat harga-harga a yang mana jumlah akar-akar persamaan (1) itu sama dengan nol.

Solusi:

a. $a=-1 \rightarrow 3^{2x}-8\cdot 3^{x}+a+8=0$

$3^{2x}-8\cdot 3^{x}+7=0$

$\left(3^{x}-1\right)\left(3^{x}-7\right)=0$

$3^{x}=1 \vee 3^{x}=7$

$x=0 \vee x={}^{3}\log 7$

$a=-17 \rightarrow 3^{2x}-8\cdot 3^{x}+a+8=0$

$3^{2x}-8\cdot 3^{x}-9=0$

$\left(3^{x}-9\right)\left(3^{x}+1\right)=0$

$3^{x}=9(\text{diterima}) \vee 3^{x}=-1(\text{ditolak})$

$x=2$

b. Ambillah akar berserikat itu adalah x_1, sehingga

$3^{2x_1}-8\cdot 3^{x_1}+a+8=0$ .... (2)

$3^{2x_1}+3^{x_1}-2a+2=0$ .... (3)

Persamaan (2) – Persamaan (3) menghasilkan:

$-9\cdot 3^{x_1}+3a+6=0$

$$3^{x_1}=\frac{3a+6}{9}=\frac{a+2}{3}$$

Selanjutnya,

$$\left(\frac{a+2}{3}\right)^2-8\left(\frac{a+2}{3}\right)+a+8=0$$

$a^2+4a+4-24a-48+9a+72=0$

$a^2-11a+28=0$

$(a-4)(a-7)=0$

$a=4 \vee a=7$

c. Ambillah x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan (1) dengan $x_1+x_2=0$, sehingga

$$3^{x_1}\times 3^{x_2}=\frac{a+8}{1}$$

$3^{x_1+x_2}=a+8$

$3^{0}=a+8$

$1=a+8$

$a=-7$

Bersambung