Mengenang Jejak Sebagian Kecil Bangsa Indonesia Yang Pernah Mengikuti Ujian Sekolah Pada Awal Masa Kemerdekaan

UJIAN PENGHABISAN SEKOLAH MENENGAH TINGKAT ATAS TAHUN 1947

ALJABAR

1. **HBS (Hogere Burger School) Holand 1947**

   Ditentukan persamaan $x^2 - x\sqrt{10} + p = 0$ salah satu akarnya ialah $\sqrt[4]{31-8\sqrt{15}}$. Hitunglah p dan akar-akar lainnya.

   Solusi:

   $$x = \sqrt[4]{31-8\sqrt{15}} = \sqrt{\sqrt{31-8\sqrt{15}}} = \sqrt{\sqrt{31-2\sqrt{240}}} = \sqrt{\sqrt{16}-\sqrt{15}} = \sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{16-4\sqrt{15}}{4}}$$

   $$= \frac{1}{2}\sqrt{16-2\sqrt{60}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$$

   $$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right) \to x^2 - x\sqrt{10} + p = 0$$

   $$\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\right]\sqrt{10} + p = 0$$

   $$\frac{1}{4}\left(16-2\sqrt{60}\right) - \frac{1}{2}\left(10-\sqrt{60}\right) + p = 0$$

   $$4-\sqrt{15}-5+\sqrt{15}+p=0$$

   $$p=1$$

   $$x^2 - x\sqrt{10} + 1 = 0$$

   $$x_{1,2} = \frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{10-4}}{2} = \frac{\sqrt{10}\pm\sqrt{6}}{2}$$

   $$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right) \text{atau}\ x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)$$

2. **SMA 1947**

   Ditentukan persamaan $(a-1)x^2 - 2(3a-1)x + 5a - 3 = 0$. Tentukan batas-batas harga a supaya akar-akar persamaan ini nyata.

   Solusi:

   Syarat agar persamaan kuadrat mempunyai dua akar yang nyata adalah $D = b^2 - 4ac \ge 0$

   $$\left[-2(3a-1)\right]^2 - 4(a-1)(5a-3) \ge 0$$

   $$9a^2 - 6a + 1 - 5a^2 + 8a - 3 \ge 0$$

   $$4a^2 + 2a - 2 \ge 0$$

   $$2a^2 + a - 1 \ge 0$$

   $$(2a-1)(a+1) \ge 0$$

   $$a \le -1 \text{atau}\ a \ge \frac{1}{2}$$

3. **HBS (Hogere Burger School) Malam 1947**

Ditentukan $(m+3)x^2-(2m-1)x+1=0$. Akar-akarnya x_1 dan x_2.

a. Tuliskan $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ sebagai fungsi dari pada *m*.

b. Gambarkan grafik fungsi ini.

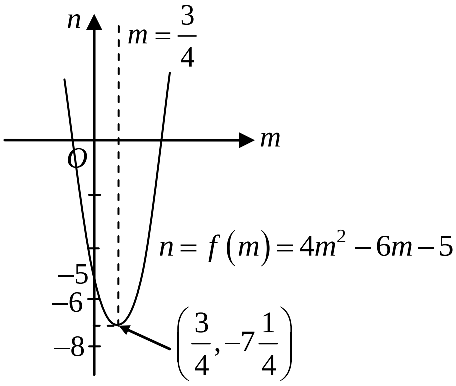
c. Buat harga *m* yang mana $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ ini mencapai harga minimum (sekecil-kecilnya) dan berapakah $f(m)$ itu dalam hal yang demikian?

Solusi:

a. $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{\left(\frac{2m-1}{m+3}\right)^2-2\times\frac{1}{m+3}}{\left(\frac{1}{m+3}\right)^2}=(2m-1)^2-2(m+3)$

$=4m^2-4m+1-2m-6=4m^2-6m-5$

b. $f(m)=\left(2m-\frac{3}{2}\right)^2-7\frac{1}{4}$



c. $f(m)=4m^2-6m-5$

$m=\frac{-(-6)}{2\cdot4}=\frac{3}{4}$

$f_{\min}\left(\frac{3}{4}\right)=4\left(\frac{3}{4}\right)^2-6\left(\frac{3}{4}\right)-5=\frac{9}{4}-\frac{18}{4}-\frac{20}{4}=-\frac{29}{4}=-7\frac{1}{4}$

4. **HBS (Hogere Burger School) Malam 1947**

Dari sebuah deret ukur yang turun dengan suku-suku positif banyaknya suku ganjil. Hasilkali dari tiga suku yang tengah yaitu 8. Jumlah suku pertama dan suku terakhir $16\frac{1}{4}$. Apabila deret di atas ini dilanjutkan sampai tak terhingga, terdapat harga limit jumlah 32. Tentukan deret asli.

Solusi:

Ambillah suku tengah deret ukur (deret geometri) tersebut adalah u_t.

$u_{t-1}\times u_t\times u_{t+1}=8$

$ar^{t-2}\times ar^{t-1}\times ar^t=8$

$a^3r^{3t-3}=8$

$ar^{t-1}=2$

$u_t=2$

$a\times u_n=u_t^2=2^2=4$

$u_n = \frac{4}{a}$ .... (1)

$a + u_n = 16\frac{1}{4}$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$a + \frac{4}{a} = 16\frac{1}{4}$

$4a^2 - 65a + 16 = 0$

$(4a - 1)(a - 16) = 0$

$a = \frac{1}{4}$ (ditolak, karena deret geometri turun) atau $a = 16$ (diterima) .

$u_n = \frac{4}{a} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{a}{1 - r}$

$32 = \frac{16}{1 - r}$

$1 - r = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$

Jadi, deret ukur (deret geometri) tersebut adalah $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

5. **HBS (Hogere Burger School) Malam 1947**

Dari sebuah deret ukur suku yang pertama 20, yang kedua 10. Buat harga-harga *n* yang mana jumlah *n* suku-suku yang pertama lebih besar dari 39,9996?

Solusi:

$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{20} = 0,5$

$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$

$\frac{20\left(0,5^n - 1\right)}{0,5 - 1} > 39,9996$

$40\left(1 - 0,5^n\right) > 39,9996$

$1 - 0,5^n > \frac{39,9996}{40}$

$1 - 0,5^n > 0,99999$

$0,5^n < 1 - 0,99999$

$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{100.000}$

$2^n > 100.000$

$\log 2^n > \log 100.000$

$n \log 2 > 5$

$n > \frac{5}{\log 2}$

$\log n > \log 5 - \log \log 2$

$\log n > 0,6990 - \log 0,3010$

$\log n > 0,6990 - (0,4786 - 1)$

$\log n > 1,2204$

$n > 16,6112$

$\therefore\ n > 16$

6. **SMA 1947**

Sebuah suku banyak, apabila dibagi oleh $x^2 - 6x + 8$ memberikan sisa $S_1 = 10x - 2$. Apabila dibagi $x + 2$ memberikan sisa $S_2 = 14$. Tentukan sisa apabila suku banyak itu dibagi oleh $(x^2 - 6x + 8)(x + 2)$.

Solusi:

$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$

$x = 2 \rightarrow \text{sisanya} = 10 \cdot 2 - 2 = 18$

$x = 4 \rightarrow \text{sisanya} = 10 \cdot 4 - 2 = 38$

Ambillah sisa pembagian suku banyak $f(x)$ adalah $ax^2 + bx + c$, sehingga

$f(x) = (x^2 - 6x + 8)(x + 2)h(x) + ax^2 + bx + c$

$f(2) = (2^2 - 6 \cdot 2 + 8)(2 + 2)h(x) + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 18 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 18$ .... (1)

$f(4) = (4^2 - 6 \cdot 4 + 8)(4 + 2)h(x) + a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 38 \Leftrightarrow 16a + 4b + c = 38$ .... (2)

$f(-2) = \left[(-2)^2 - 6(-2) + 8\right](-2 + 2)h(x) + a(-2)^2 + b(-2) + c = 14 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 14$ .... (3)

Persamaan (1) – Persamaan (3) menghasilkan: $4b = 4 \Leftrightarrow b = 1$.

Persamaan (2) – Persamaan (1) menghasilkan:

$12a + 2b = 20$

$12a + 2 \cdot 1 = 20$

$a = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Substitusikan $a = \frac{3}{2}$ dan $b = 1$ ke persamaan (1), sehingga

$4 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 1 + c = 18$

$c = 18 - 6 - 2 = 10$

Jadi, sisanya adalah $\frac{3}{2}x^2 + x + 10$.

Bersambung