

BAB 9 INTEGRAL

TIPE 1: INTEGRAL DENGAN CARA SUBSTITUSI

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

Contoh 1:

Hasil dari $\int x^2(x^3 + 2)^5 dx = \dots$

- A. $\frac{1}{12}(x^3 + 2)^6 + C$ C. $\frac{1}{4}(x^3 + 2)^6 + C$ E. $(x^3 + 2)^6 + C$
 B. $\frac{1}{6}(x^3 + 2)^6 + C$ D. $\frac{1}{2}(x^3 + 2)^6 + C$

Solusi: [Jawaban A]

Alternatif 1:

Ambillah $x^3 + 2 = u$, sehingga $\frac{du}{dx} = 3x^2$ atau $\frac{1}{3} du = x^2 dx$.

$$\int x^2(x^3 + 2)^5 dx = \int \frac{1}{3} u^5 du = \frac{1}{18} u^6 + C = \frac{1}{18} (x^3 + 2)^6 + C$$

Alternatif 2: Care

$$\int x^2(x^3 + 2)^5 dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^5 d(x^3 + 2) = \frac{1}{18} (x^3 + 2)^6 + C$$

Contoh 2:

Hasil dari $\int \sin^3 x \cos x dx = \dots$

- A. $\sin^4 x + C$ B. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C$ C. $\frac{3}{4} \sin^4 x + C$ D. $\frac{1}{2} \sin^4 x + C$ E. $\frac{1}{8} \sin^4 x + C$

Solusi 1: [B]

Ambillah $u = \sin x$ sehingga $\frac{du}{dx} = \cos x$ atau $du = \cos x dx$.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

Solusi 2: Care

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

TIPE 2: INTEGRAL PARSIAL

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Contoh 1:

Hasil dari $\int x^2 \sin x dx = \dots$

- A. $-x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$ C. $2x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$

B. $x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$

D. $-x^2 \cos x + x \sin x - 2 \cos x + C$

C. $-2x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$

Solusi 1: [A]

Ambillah $u = x^2$ sehingga $\frac{du}{dx} = 2x$ atau $du = 2x dx$ dan $dv = \sin x dx$ sehingga $v = \int \sin x dx = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x dx$$

Ambillah $u = -2x$ sehingga $\frac{du}{dx} = -2$ atau $du = -2 dx$ dan $dv = \cos x dx$ sehingga $v = \int \cos x dx = \sin x$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x - \left[-2x \sin x - \int -2 \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + \int 2 \sin x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C \end{aligned}$$

Solusi 2: Care

Diferensial	Integral
x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$ → +
2	$-\sin x$ → -
0	$\cos x$ → +

$$\therefore \int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$$

Contoh 2:

Hasil dari $\int x\sqrt{2x+1} dx = \dots$

A. $\frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + C$

D. $\frac{1}{12}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + C$

B. $\frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + C$

E. $\frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{15}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

C. $\frac{1}{6}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + C$

Solusi 1:

Ambillah $u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1$ atau $du = dx$ dan $dv = \sqrt{2x+1} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \int \sqrt{2x+1} d(2x+1) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x+1} dx &= x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} d(2x+1) \\ &= \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}x(2x+1)^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

Solusi 2: Care

Diferensial	Integral
x	$\sqrt{2x+1}$
1	$\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ → +
0	$\frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}}$ → -

$$\therefore \int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}x(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} + C$$

TIPE 3: MENGHITUNG LUAS DAERAH:

Luas daerah tertutup yang dibatasi fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah $L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$, dengan $D = b^2 - 4ac$ adalah diskriminan

Contoh 1:

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ dan sumbu X.

- A. $12\frac{2}{3}$ satuan luas C. $10\frac{2}{3}$ satuan luas E. $10\frac{1}{6}$ satuan luas
 B. $11\frac{2}{3}$ satuan luas D. $10\frac{1}{3}$ satuan luas

Solusi 1: [C]

Batas-batas integral:

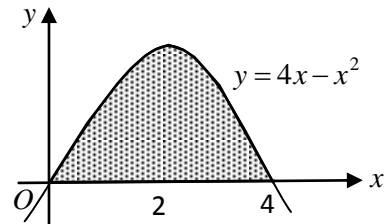
$$y = 4x - x^2$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = 4$$

$$L = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$



Solusi 2: Care

$$y = 4x - x^2$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$D = 4^2 - 4(-1) \cdot 0 = 16$$

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2} = \frac{16\sqrt{16}}{6(-1)^2} = \frac{16 \cdot 4}{6} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ satuan luas}$$

Contoh 2:

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$ dan $y = x - 1$ adalah ...

- A. $\frac{41}{6}$ satuan luas C. $\frac{9}{2}$ satuan luas E. $\frac{11}{6}$ satuan luas
 B. $\frac{19}{3}$ satuan luas D. $\frac{8}{3}$ satuan luas

Solusi 1:

$$y = x^2 - 4x + 3 \rightarrow y = (x - 1)(x - 3)$$

Batas-batas Integral:

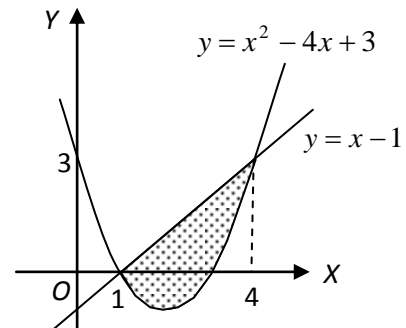
$$y = x - 1 \rightarrow y = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 4$$



$$L = \int_a^b f(x) dx$$

$$L = \int_1^4 (x - 1 - x^2 + 4x - 3) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4$$

$$= -\frac{64}{3} + 40 - 16 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right)$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 28 = -21 - \frac{5}{2} + 28 = \frac{9}{2} \text{ satuan luas} \rightarrow [C]$$

Solusi 2: Care

$$y = x - 1$$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2} = \frac{9\sqrt{9}}{6 \cdot 1^2} = \frac{9 \cdot 3}{6 \cdot 1} = \frac{9}{2} \text{ satuan luas} \rightarrow [C]$$

TIPE 4: MENGHITUNG VOLUME BENDA PUTAR

Volume benda putar dari daerah tertutup yang dibatasi fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah

$$V = \frac{\pi D^2 \sqrt{D}}{30|a|^3}, \text{ dengan } D = b^2 - 4ac \text{ adalah diskriminan}$$

Contoh:

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x - x^2$ dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° .

A. $\frac{512\pi}{15}$ satuan volume

C. $\frac{128\pi}{15}$ satuan volume

E. $\frac{32\pi}{15}$ satuan volume

B. $\frac{256\pi}{15}$ satuan volume

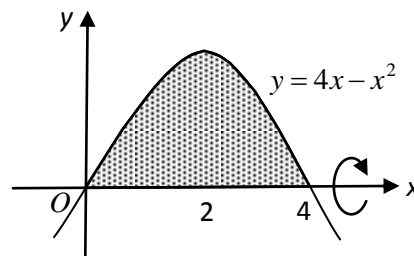
D. $\frac{64\pi}{15}$ satuan volume

Solusi 1: [A]

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx$$



$$V = \pi \left[\frac{16}{3}x^3 - 2x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^4 = \pi \left(\frac{16}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^4 + \frac{1}{5} \cdot 4^5 - 0 \right) = 256\pi \left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{5} \right) = 256\pi \left(\frac{20 - 30 + 12}{15} \right)$$

$$= \frac{512\pi}{15}$$

Solusi 2: Care

$$4x - x^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 16$$

$$V = \frac{\pi D^2 \sqrt{D}}{30|a|^3} = \frac{\pi \cdot 16^2 \sqrt{16}}{30|-1|^3} = \frac{512\pi}{15}$$

SOAL-SOAL LATIHAN

1. **UN 2013**

Hasil dari $\int \frac{4x-8}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \dots$

A. $4\sqrt{x^2-4x+5} + C$

C. $\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4x+5} + C$

E. $-4\sqrt{x^2-4x+5} + C$

B. $2\sqrt{x^2-4x+5} + C$

D. $-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4x+5} + C$

2. **UN 2013**

Hasil dari $\int (2x-1)\sqrt{x^2-x+5} dx = \dots$

A. $\frac{1}{2}(x^2-x+5)\sqrt{x^2-x+5} + C$

C. $(x^2-x+5)\sqrt{x^2-x+5} + C$

E.

$2(x^2-x+5)\sqrt{x^2-x+5} + C$

B. $\frac{2}{3}(x^2-x+5)\sqrt{x^2-x+5} + C$

D. $\frac{3}{2}(x^2-x+5)\sqrt{x^2-x+5} + C$

3. **UN 2013**

Hasil dari $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \dots$

A. $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+1} + C$

C. $2\sqrt{x^2+1} + C$

E. $6\sqrt{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$

D. $3\sqrt{x^2+1} + C$

4. **UN 2013**

Nilai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 x \cos x) dx = \dots$

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $1 + \sqrt{3}$

E. $\sqrt{3} - 1$

5. **UN 2013**

Hasil dari $\int \frac{(2x-3)}{\sqrt{2x^2-6x+5}} dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-6x+5} + C$ C. $\frac{2}{3}\sqrt{2x^2-6x+5} + C$ E. $\frac{1}{\sqrt{2x^2-6x+5}} + C$
 B. $\sqrt{2x^2-6x+5} + C$ D. $2\sqrt{2x^2-6x+5} + C$

6. UN 2013

Hasil dari $\int \left((3x+1)\sqrt{3x^2+2x-4} \right) dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$ C. $\frac{1}{6}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$ E. $\frac{1}{18}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$
 B. $\frac{1}{3}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$ D. $\frac{1}{12}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$

7. UN 2013

Nilai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin^2 x \cos x) dx = \dots$

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $1+\sqrt{3}$ E. $\sqrt{3}-1$

8. UN 2013

Hasil dari $\int \left((3x+1)\sqrt{3x^2+2x-4} \right) dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$ D. $\frac{1}{12}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$ E. $\frac{1}{18}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$
 B. $\frac{1}{3}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$ C. $\frac{1}{6}(3x^2+2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$

9. UN 2013

Hasil dari $\int 2x(4x^2+3)^{\frac{3}{2}} dx = \dots$

- A. $\frac{3}{10}(4x^2+3)^2\sqrt{4x^2+3} + C$ D. $\frac{1}{4}(4x^2+3)^2\sqrt{4x^2+3} + C$
 B. $\frac{2}{10}(4x^2+3)^2\sqrt{4x^2+3} + C$ E. $\frac{2}{3}(4x^2+3)^2\sqrt{4x^2+3} + C$
 C. $\frac{1}{10}(4x^2+3)^2\sqrt{4x^2+3} + C$

10. UN 2013

Nilai dari $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t) dt = \dots$

- A. 2 B. $1\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{3}$

11. UN 2013

Hasil dari $\int \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}} dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x} + C$ C. $2\sqrt{x^2-2x} + C$ E. $4x\sqrt{x^2-2x} + C$
 B. $\sqrt{x^2-2x} + C$ D. $2x\sqrt{x^2-2x} + C$

12. UN 2011

Hasil dari $\int \cos^4 2x \sin 2x dx = \dots$

- A. $-\frac{1}{10} \sin^5 2x + C$ C. $-\frac{1}{5} \sin^5 2x + C$ E. $\frac{1}{10} \sin^5 2x + C$
 B. $-\frac{1}{10} \cos^5 2x + C$ D. $\frac{1}{10} \cos^5 2x + C$

13. UN A35 2012

Hasil dari $\int \frac{2x^2}{\sqrt[7]{(2x^3-5)^5}} dx = \dots$

- A. $\frac{3}{7} \sqrt[7]{(2x^3-5)^3} + C$ C. $\frac{6}{7} \sqrt[7]{(2x^3-5)^6} + C$ E. $\frac{7}{6} \sqrt[7]{(2x^3-5)^7} + C$
 B. $\frac{6}{7} \sqrt[6]{(2x^3-5)^7} + C$ D. $\frac{7}{6} \sqrt[7]{(2x^3-5)^2} + C$

14. UN A35 dan D74 2012

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$ dan $y = x - 1$ adalah ...

- A. $\frac{41}{6}$ satuan luas C. $\frac{9}{2}$ satuan luas E. $\frac{11}{6}$ satuan luas
 B. $\frac{19}{3}$ satuan luas D. $\frac{8}{3}$ satuan luas

15. UN 2012 B47

Hasil dari $\int \frac{3x-1}{(3x^2-2x+7)^7} dx = \dots$

- A. $\frac{1}{3(3x^2-2x+7)^6} + C$ C. $\frac{1}{6(3x^2-2x+7)^6} + C$ E. $\frac{-1}{12(3x^2-2x+7)^7} + C$
 B. $\frac{1}{4(3x^2-2x+7)^6} + C$ D. $\frac{-1}{12(3x^2-2x+7)^6} + C$

16. UN B47 2012

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 4x + 3$ dan $y = 3 - x$ adalah ...

- A. $\frac{41}{6}$ satuan luas C. $\frac{9}{2}$ satuan luas E. $\frac{11}{6}$ satuan luas
 B. $\frac{19}{3}$ satuan luas D. $\frac{8}{3}$ satuan luas

17. UN C61 dan E81 2012

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 3x + 4$ dan $y = 1 - x$ adalah

- A. $\frac{2}{3}$ satuan luas C. $\frac{7}{4}$ satuan luas E. $\frac{15}{3}$ satuan luas
 B. $\frac{4}{3}$ satuan luas D. $\frac{8}{3}$ satuan luas

18. UN D74 2012

Hasil dari $\int (4x+3)(4x^2+6x-9)^9 dx = \dots$

- A. $\frac{1}{10}(4x^2+6x-9)^{10} + C$ C. $\frac{1}{20}(2x-3)^{20} + C$ E. $\frac{1}{30}(4x^2+6x-9)^{10} + C$
 B. $\frac{1}{15}(2x-3)^{20} + C$ D. $\frac{1}{20}(4x^2+6x-9)^{10} + C$

19. UN P-12 dan P-45 2011

Hasil dari $\int \cos^4 2x \sin 2x dx = \dots$

- A. $-\frac{1}{10} \sin^5 2x + C$ C. $-\frac{1}{5} \sin^5 2x + C$ E. $\frac{1}{10} \sin^5 2x + C$
 B. $-\frac{1}{10} \cos^5 2x + C$ D. $\frac{1}{10} \cos^5 2x + C$

20. UN 2011

Hasil $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}} dx = \dots$

- A. $2\sqrt{3x^2+9x-1} + C$ C. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$ E. $\frac{3}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
 B. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$

21. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = 4 - x^2$ dan sumbu X diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X.

- A. $\frac{6}{15}\pi$ satuan volume C. $\frac{14}{15}\pi$ satuan volume E. $\frac{32}{15}\pi$ satuan volume
 B. $\frac{12}{15}\pi$ satuan volume D. $\frac{16}{15}\pi$ satuan volume

22. Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva

$y = x^2 - 2x - 8$ dan sumbu X diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X.

- A. $\frac{1296}{5}\pi$ satuan volume C. $\frac{192}{5}\pi$ satuan volume E. $\frac{72}{5}\pi$ satuan volume
 B. $\frac{486}{5}\pi$ satuan volume D. $\frac{162}{5}\pi$ satuan volume