

# BAB 8

## DIFERENSIAL

**TIPE 1:**

Turunan pertama fungsi  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , dengan  $x \neq -\frac{d}{c}$  adalah  $\frac{\text{determinan koefisien}}{\text{penyebut kuadrat}}$ , yaitu  $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ .

**Contoh:**

Turunan pertama dari  $f(x) = \frac{4x-5}{3x+2}$  adalah  $f'(x) = \dots$

- A.  $\frac{5x-3}{(3x+2)^2}$       B.  $\frac{3x-3}{(3x+2)^2}$       C.  $\frac{-7}{(3x+2)^2}$       D.  $\frac{-5}{(3x+2)^2}$       E.  $\frac{23}{(3x+2)^2}$

**Solusi 1: [E]**

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{4x-5}{3x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4(3x+2) - 3(4x-5)}{(3x+2)^2} = \frac{23}{(3x+2)^2}$$

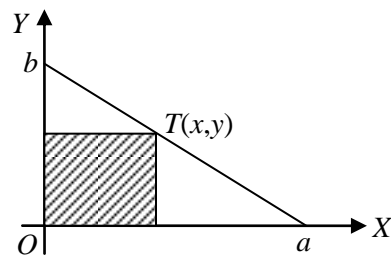
**Solusi 2: Care**

$$f(x) = \frac{4x-5}{3x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4 \times 2 - (-5) \times 3}{(3x+2)^2} = \frac{23}{(3x+2)^2}$$

**TIPE 2:**

Jika luas segi empat yang diarsir maksimum, maka

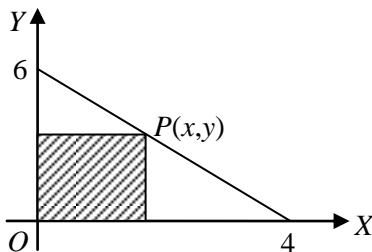
1. Koordinat  $T$  adalah  $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
2. Luas segi empat yang diarsir maksimum =  $\frac{1}{2} \times$  luas segitiga



**Contoh:**

Luas daerah yang diarsir pada gambar akan mencapai maksimum jika koordinat  $P$  adalah ....

- A. (2,3)  
 B. (4,3)  
 C. (3,2)  
 D.  $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$



E.  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

**Solusi 1: [A]**

Persamaan garis yang melalui titik (4,0) dan (0,6) adalah  $6x + 4y = 24$  atau  $y = 6 - \frac{3}{2}x$

Koordinat titik  $T(x,y) = T\left(x, 6 - \frac{3}{2}x\right)$

Luas daerah yang diarsir:  $L(x) = x\left(6 - \frac{3}{2}x\right) = 6x - \frac{3}{2}x^2$

$L'(x) = 6 - 3x$

Nilai stasioner dicapai jika  $L'(x) = 0$ , maka

$6 - 3x = 0$

$x = 2$

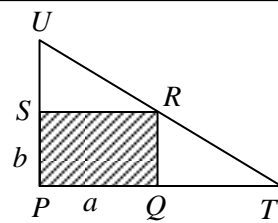
$x = 2 \Rightarrow y = 6 - \frac{3}{2}x = 6 - \frac{3}{2}(2) = 3$

Jadi, koordinat  $T$  adalah (2,3).

**Solusi 2: Care**

Koordinat  $T\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = T\left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = T(2,3)$

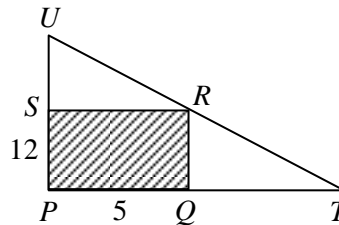
**TIPE 3:**

<p>Jika persegi panjang <math>PQRS</math> terletak pada <math>\Delta PTU</math> siku-siku di <math>P</math>, dengan <math>PQ</math> dan <math>PS</math> diketahui, maka luas minimum <math>\Delta PTU</math></p> <p><math>= 2 \times</math> luas segi empat <math>PQRS</math>.</p>	
--	---

**Contoh:**

Persegi panjang  $PQRS$  terletak pada segitiga siku-siku  $PTU$ . Jika  $PS = 12$  dan  $PQ = 5$ , maka luas minimum  $\Delta PTU$  adalah....

- A. 360
- B. 180
- C. 120
- D. 80
- E. 60



**Solusi 1: [C]**

Ambillah  $PT = x$  dan  $PU = y$ .

Perhatikan  $\Delta PTU \sim \Delta QTR$

$$\frac{PU}{PS} = \frac{PT}{QT}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{x}{x-5}$$

$$y = \frac{12x}{x-5}$$

$$\text{Luas } \Delta PTU = L = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \times \frac{12x}{x-5} = \frac{6x^2}{x-5}$$

$$L' = \frac{12x(x-5) - 1(6x^2)}{(x-5)^2} = \frac{6x^2 - 60x}{(x-5)^2}$$

Nilai stasioner dicapai jika  $L' = 0$ , maka

$$\frac{6x^2 - 60x}{(x-5)^2} = 0$$

$$6x(x-10) = 0$$

$x = 0$  (ditolak) atau  $x = 10$  (diterima)

$$x = 10 \rightarrow y = \frac{12x}{x-5} = \frac{12 \times 10}{10-5} = 24$$

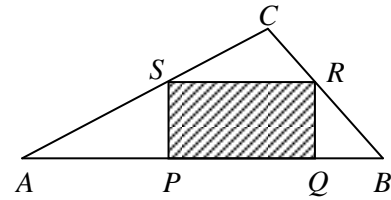
$$\text{Luas minimum } \Delta PTU = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 10 \times 24 = 120$$

**Solusi 2: Care**

Luas minimum  $\Delta PTU = 2 \times$  luas segi empat  $= 2 \times (5 \times 12) = 120$

#### TIPE 4:

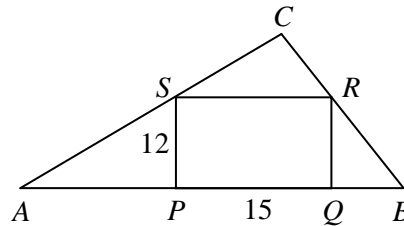
Jika persegi panjang  $PQRS$  terletak pada  $\Delta ABC$ , dengan  $PQ$  dan  $PS$  diketahui, maka luas minimum  $\Delta ABC = 2 \times$  luas segi empat  $PQRS$ .



#### Contoh:

Persegi panjang  $PQRS$  terletak pada  $\Delta ABC$ . Jika  $PS = 8$  dan  $PQ = 15$ , maka luas minimum  $\Delta ABC$  adalah....

- A. 360
- B. 180
- C. 120
- D. 80
- E. 60



#### Solusi 1: [A]

Misalnya  $AB = x$  dan  $CT = y$ .  $CT \perp AB$

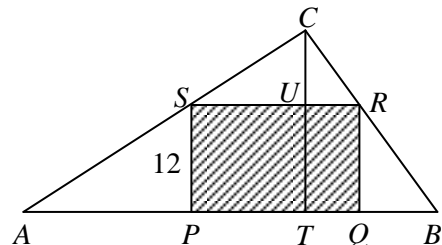
Perhatikan  $\Delta ABC \sim \Delta SRC$  sehingga

$$AB : SR = CT : CU$$

$$x : 15 = y : (y - 12)$$

$$y = \frac{12x}{x-15}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = L = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \times \frac{12x}{x-15} = \frac{6x^2}{x-15}$$



$$L' = \frac{12x(x-15) - 1(6x^2)}{(x-15)^2} = \frac{6x^2 - 180x}{(x-15)^2}$$

Nilai stasioner dicapai jika  $L' = 0$ , maka

$$\frac{6x^2 - 180x}{(x-15)^2} = 0$$

$$6x(x-30) = 0$$

$x = 0$  (ditolak) atau  $x = 30$  (diterima)

$$x = 30 \rightarrow y = \frac{12x}{x-15} = \frac{12 \times 30}{30-15} = 24$$

$$\text{Luas minimum } \Delta ABC = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 30 \times 24 = 360$$

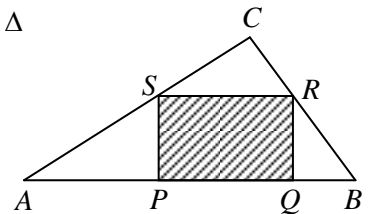
**Solusi 2: Care**

$$\text{Luas minimum } \Delta ABC = 2 \times \text{luas segi empat } PQRS = 2 \times (15 \times 12) = 360$$

**TIPE 5:**

Jika persegi panjang  $PQRS$  terletak pada  $\Delta ABC$ , dengan unsur-unsur  $\Delta ABC$  diketahui maka luas maksimum segi empat  $PQRS$

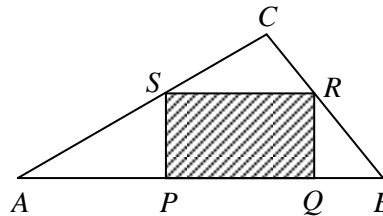
$$= \frac{1}{2} \times \text{luas segitiga } ABC$$



**Contoh:**

Persegi panjang  $PQRS$  terletak pada segitiga  $ABC$ . Jika  $AB = 15$ ,  $BC = 13$ , dan  $AC = 14$ , maka luas maksimum segi empat  $PQRS$  adalah....

- A. 64
- B. 54
- C. 48
- D. 42
- E. 32



**Solusi 1: [D]**

Menurut Heron:

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21$$

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$$

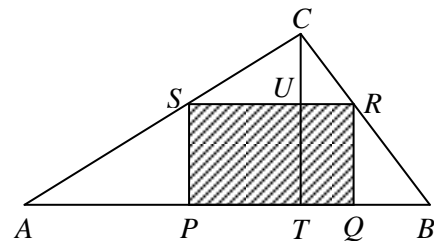
$$L = \frac{1}{2}CT \times AB$$

$$84 = \frac{1}{2}CT \times 15$$

$$CT = \frac{56}{5}$$

Misalnya  $PQ = x$  dan  $PS = y$ .  $CT$  tegak lurus pada  $AB$ .

Perhatikan  $\Delta ABC \sim \Delta SRC$  sehingga



$$\frac{AB}{SR} = \frac{CT}{CU}$$

$$\frac{15}{x} = \frac{\frac{56}{5}}{\frac{56}{5} - y}$$

$$y = \frac{840 - 56x}{75}$$

$$\text{Luas segi empat } PQRS = xy = x \cdot \frac{840 - 56x}{75} = \frac{840x - 56x^2}{75}$$

$$L' = \frac{840 - 112x}{75}$$

Nilai stasioner dicapai jika  $L' = 0$ , sehingga

$$\frac{840 - 112x}{75} = 0$$

$$x = \frac{840}{112} = 7,5$$

$$x = 7,5 \rightarrow y = \frac{840 - 56x}{75} = \frac{840 - 56 \times 7,5}{75} = 5,6$$

$$\text{Luas segi empat } PQRS \text{ maksimum} = xy = 7,5 \times 5,6 = 42$$

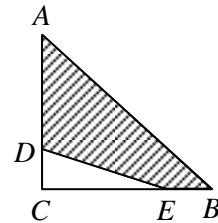
**Solusi 2: Care**

$$\text{Luas segi empat } PQRS \text{ maksimum} = \frac{1}{2} \times \text{luas segitiga } ABC = \frac{1}{2} \times 84 = 42$$

### TIPE 6:

Diketahui  $\triangle ABC$  siku-siku sama kaki di  $C$ . Jika  $AC = BC$  dan  $CD = BE$ , maka luas segi empat  $ADEB$  minimum

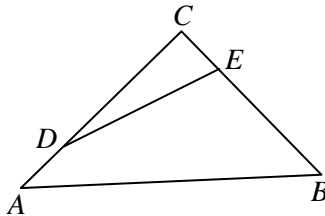
$$= \frac{3}{4} \times \text{luas } \triangle ABC.$$



### Contoh: SPMB Madas Regional I, 2004

Jika  $\triangle ABC$  siku-siku sama kaki,  $AC = BC = 20$  dan  $AD = CE$ , maka luas minimum dari segi empat  $ABED$  adalah ....

- A. 50
- B. 100
- C. 125
- D. 150
- E. 200



**Solusi 1: [D]**

Misalnya  $AD = CE = x$ , maka  $CD = 20 - x$ .

Luas segi empat  $ABED = \text{Luas } \triangle ABC - \text{luas } \triangle DCE$

$$L = \frac{1}{2} \times 20^2 - \frac{1}{2} x(20 - x) = 200 - 10x + \frac{1}{2} x^2$$

$$L' = -10 + x$$

Nilai stasioner fungsi  $L$  dicapai jika  $L' = 0$ , maka

$$-10 + x = 0$$

$$x = 10$$

$$\text{Luas minimum dari segi empat } ADEB = 200 - 10 \times 10 + \frac{1}{2} \times 10^2 = 150$$

**Solusi 2: Care**

$$\text{Luas minimum dari segi empat } ADEB = \frac{3}{4} \times \text{luas setiga } ABC = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 20^2 = 150$$

## SOAL-SOAL LATIHAN

1. **UN A35 2012**

Sebuah segitiga dibatasi oleh garis  $x + 2y = 4$ , sumbu  $X$ , dan sumbu  $Y$ . dari sebuah titik pada garis itu dibuat garis-garis tegak lurus pada sumbu  $X$  dan sumbu  $Y$  sehingga membentuk sebuah persegi panjang seperti pada gambar berikut. Luas maksimum daerah persegi panjang yang diarsir adalah....

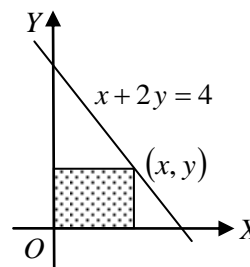
A.  $\frac{1}{4}$  satuan luas

B.  $\frac{1}{2}$  satuan luas

C. 1 satuan luas

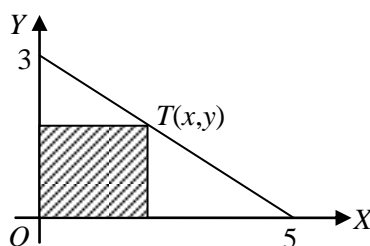
D. 2 satuan luas

E. 3 satuan luas



2. **UN 2007**

Perhatikan gambar!



Luas daerah yang diarsir pada gambar akan mencapai maksimum jika koordinat  $T$  adalah ....

A.  $\left(3, \frac{6}{5}\right)$

B.  $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

C.  $\left(2, \frac{9}{5}\right)$

D.  $\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{10}\right)$

E.  $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

3. **UN 2004**

Turunan pertama dari fungsi yang dinyatakan dengan  $f(x) = \frac{x-5}{x+5}$  adalah  $f'(x) = \dots$

A.  $\frac{-10}{(x+5)^2}$

B.  $\frac{5}{(x+5)^2}$

C.  $\frac{10}{(x+5)^2}$

D.  $\frac{5}{(x-5)^2}$

E.  $\frac{10}{(x-5)^2}$

4. **EBTANAS 1995**

Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = \frac{2x+1}{2+3x}$  untuk  $x \neq -\frac{2}{3}$ .  $f'$  adalah turunan pertama dari  $f$ , maka  $f'(2) = \dots$

- A.  $\frac{1}{64}$       B.  $\frac{4}{64}$       C.  $\frac{7}{64}$       D.  $\frac{5}{8}$       E.  $\frac{2}{3}$

5. **EBTANAS 1994**

Diketahui  $f(x) = \frac{3x-5}{2x-4}$ ;  $x \neq 2$ . Turunan pertama  $f(x)$  adalah  $f'(x)$ . Nilai dari  $f'(1)$  adalah ....

- A. -11      B.  $-\frac{5}{2}$       C. -1      D.  $-\frac{1}{2}$       E. 1

6. **EBTANAS 1993**

Diketahui  $f(x) = \frac{5x-3}{2x+1}$ ;  $x \neq -\frac{1}{2}$ . Turunan pertamanya adalah  $f'(x) = \dots$

- A.  $\frac{20x+11}{(2x+1)^2}$       B.  $\frac{-1}{(2x+1)^2}$       C.  $\frac{11}{(2x+1)^2}$       D.  $\frac{-11}{(2x+1)^2}$       E.  $\frac{20x-1}{(2x+1)^2}$

7. **EBTANAS 1990**

Turunan dari  $f(x) = \frac{3x-5}{4x+7}$ ;  $x \neq -\frac{3}{4}$ . Maka  $f'(x) = \dots$

- A.  $\frac{41}{(4x+7)^2}$       B.  $\frac{-41}{(4x+7)^2}$       C.  $\frac{31}{(4x+7)^2}$       D.  $\frac{-31}{(4x+7)^2}$       E.  $\frac{1}{(4x+7)^2}$

8. **EBTANAS 1990**

Diketahui  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ;  $x \neq -2$ . Turunan pertamanya adalah  $f'(x) = \dots$

- A.  $\frac{4x+5}{(x+2)^2}$       B.  $\frac{4x+3}{(x+2)^2}$       C.  $\frac{3}{(x+2)^2}$       D.  $\frac{4}{(x+2)^2}$       E.  $\frac{5}{(x+2)^2}$

9. **EBTANAS 1989**

Ditentukan  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ ;  $x \neq 2$ . Maka  $f'(x) = \dots$

- A.  $\frac{-2}{(x-2)^2}$       B.  $\frac{2}{(x-2)^2}$       C.  $\frac{2}{x-2}$       D.  $\frac{-2}{x-2}$       E.  $\frac{2x-2}{x-2}$

10. **UMPTN Madas Rayon C, 1993**

Jika  $xy + x - 2y - 1 = 0$ , maka  $\frac{dy}{dx} = \dots$

- A.  $\frac{x+1}{(x-2)^2}$       B.  $\frac{x-1}{(x-2)^2}$       C.  $\frac{1-x}{(x-2)^2}$       D.  $\frac{11}{(x-2)^2}$       E.  $\frac{-1}{(x-2)^2}$

11. **UMPTN Madas Rayon B, 1993**

Jika  $f(x) = \frac{2x-5}{3x-2}$ , maka  $f^{-1}(1) = \dots$

- A. -11      B. -3      C. -7      D.  $\frac{2}{3}$       E. 11

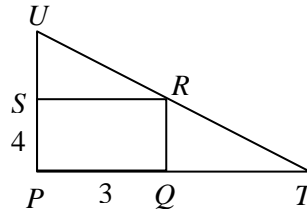
12. Turunan pertama dari  $f(x) = \frac{x-4}{2x-3}$  adalah  $f'(x)$ . Nilai dari  $f'(2) = \dots$

- A. 8      B. 7      C. 6      D. 5      E. 4

13. **SPMB Madas, Regional III, 2004**

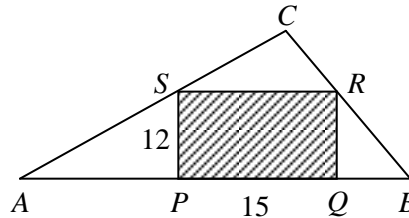
Persegi panjang  $PQRS$  terletak pada segitiga siku-siku  $PTU$ . Jika  $PS = 4$  dan  $PQ = 3$ , maka luas minimum  $\Delta PTU$  adalah....

- A. 16
- B. 18
- C. 20
- D. 22
- E. 24



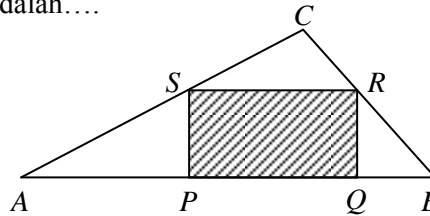
14. Persegi panjang  $PQRS$  terletak pada segitiga  $ABC$ . Jika  $PQ = 14$  dan  $PS = 8$ , maka luas minimum  $\Delta ABC$  adalah....

- A. 224
- B. 114
- C. 112
- D. 92
- E. 72



15. Persegi panjang  $PQRS$  terletak pada segitiga  $ABC$ . Jika  $AB = 29$ ,  $BC = 20$ , dan  $AC = 21$ , maka luas maksimum segi empat  $PQRS$  adalah....

- A. 210
- B. 115
- C. 105
- D. 85
- E. 75



16. **SMPB Madas Regional I, 2004**

Jika  $\Delta ABC$  siku-siku sama kaki,  $AC = BC = 5$  dan  $AD = CE$ , maka luas minimum dari segi empat  $ABED$  adalah ....

- A. 7,500
- B. 9,375
- C. 9,750
- D. 10,375
- E. 12,500

