

BAB 6

LINGKARAN

TIPE 1: Menentukan Pusat dan Persamaan Lingkaran

Contoh:

Persamaan lingkaran yang berjari-jari 4 dan sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ adalah

- A. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ E. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$
 B. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 3 = 0$

Solusi 1: [A]

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 &= 0 \\ (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 3 &= 0 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Pusat lingkarannya adalah $(-2, 3)$

Solusi 2:

Pusat lingkarannya adalah $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = \left(-\frac{1}{2} \cdot 4, -\frac{1}{2}(-6)\right) = (-2, 3)$

Solusi 3: Care

Turunkan terhadap x : $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
 Turunkan terhadap y : $2y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3$
 Pusat lingkarannya adalah $(-2, 3)$.

Jadi, persamaan lingkarannya adalah
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$
 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

TIPE 2: Menentukan Persamaan Garis Singgung

Contoh: UN AP 12 dan B45 2011

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7, 1)$ adalah

- A. $3x - 4y - 41 = 0$ C. $4x - 5y - 53 = 0$ E. $4x - 3y - 40 = 0$
 B. $4x + 3y - 41 = 0$ D. $4x + 3y - 31 = 0$

Solusi 1: [D]

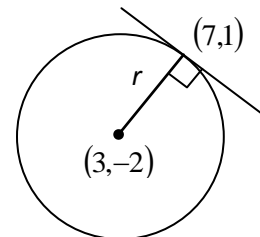
Jelaslah titik $(7, 1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$, karena $7^2 + 1^2 - 6 \cdot 7 + 4 \cdot 1 - 12 = 0$ adalah pernyataan yang bernilai benar.

Persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0.$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$\begin{aligned} 7 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{1}{2}(-6)(x+7) + \frac{1}{2}(4)(y+1) - 12 &= 0 \\ 7x + y - 3x - 21 + 2y + 2 - 12 &= 0 \\ 4x + 3y - 31 &= 0 \end{aligned}$$



Solusi 2:

Titik pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ adalah $(3, -2)$.

Gradien garis yang melalui titik $(3, -2)$ dan $(7, 1)$ adalah $m_1 = \frac{1 - (-2)}{7 - 3} = \frac{3}{4}$

Syarat garis berpotongan saling tegak lurus adalah $m_1 \times m_2 = -1$, sehingga

$$\frac{3}{4} \times m_2 = -1$$

$$m_2 = -\frac{4}{3}$$

Persamaan garis singgung yang melalui titik $(7, 1)$ dan gradien $m_2 = -\frac{4}{3}$ adalah

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 7)$$

$$3y - 3 = -4x + 28$$

$$4x + 3y - 31 = 0$$

Solusi 3: Care (Analisis Jawaban)

Substitusikan $(7, 1)$ ke setiap opsi jawaban.

$$(7, 1) \Rightarrow 3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 - 41 \neq 0 \rightarrow \text{Jawaban A salah}$$

$$(7, 1) \Rightarrow 4 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 41 \neq 0 \rightarrow \text{Jawaban B salah}$$

$$(7, 1) \Rightarrow 4 \cdot 7 - 5 \cdot 1 - 53 \neq 0 \rightarrow \text{Jawaban C salah}$$

$$(7, 1) \Rightarrow 4 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 31 \neq 0 \rightarrow \text{Jawaban D benar}$$

$$(7, 1) \Rightarrow 4 \cdot 7 - 3 \cdot 1 - 40 \neq 0 \rightarrow \text{Jawaban E salah}$$

Contoh 2:

Persamaan garis singgung melalui titik $(2, -1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 13 = 0$ adalah....

A. $2x - y - 5 = 0$

C. $x + 2y + 6 = 0$

E. $2x + y - 3 = 0$

B. $x + y - 1 = 0$

D. $3x - 2y + 4 = 0$

Solusi 1: [B]

Jelaslah titik $(2, -1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 13 = 0$, karena

$$2^2 + (-1)^2 - 12 \cdot 2 - 6(-1) + 13 = 0 \text{ adalah pernyataan yang bernilai benar.}$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 13 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 32$$

Gradien garis yang melalui titik $(2, -1)$ dan $(6, 3)$

$$\text{adalah } m_1 = \frac{3 - (-1)}{6 - 2} = 1$$

Syarat dua garis berpotongan tegak lurus adalah $m_1 \times m_2 = -1$, maka

$$1 \times m_2 = -1$$

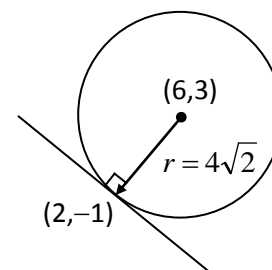
$$m_2 = -1$$

Persamaan garis singgungnya bergradien $m_2 = -1$ dan melalui titik $(2, -1)$ adalah

$$y - b = m(x - a)$$

$$y + 1 = -1(x - 2)$$

$$x + y - 1 = 0$$



Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $x - y + 1 = 0$.

Solusi 2: Care (Analisis Jawaban)

Substitusikan $(2, -1)$ ke opsi setiap jawaban. Jawaban yang benar adalah A, B, dan E. Karena gradient garis singgung adalah 1, maka jawaban yang benar adalah B.

LATIHAN SOAL-SOAL

- Persamaan lingkaran yang berjari-jari 3 dan sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ adalah
A. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$ C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$ E. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 4 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 4x - 3y - 4 = 0$
- UN AP 12 dan BP 45 2008**
Persamaan garis singgung melalui titik $(-2, -1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 13 = 0$ adalah....
A. $-2x - y - 5 = 0$ C. $x + 2y + 4 = 0$ E. $2x - y + 3 = 0$
B. $x - y + 1 = 0$ D. $3x - 2y + 4 = 0$
- UN BP 45 2007**
Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7, -5)$ adalah....
A. $4x - 3y = 43$ C. $3x - 4y = 41$ E. $4x - 5y = 53$
B. $4x + 3y = 23$ D. $10x + 3y = 55$
- UN 2005 (Non KBK)**
Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 91 = 0$ yang melalui titik $(-7, -10)$ adalah....
A. $2x - y + 4 = 0$ C. $5x + y + 15 = 0$ E. $2x + y + 24 = 0$
B. $2x + y + 4 = 0$ D. $5x - y + 15 = 0$
- UAN 2002**
Titik (a, b) adalah pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Jadi, $2a + b = \dots$
A. 0 B. 2 C. 3 D. -1 E. -2
- EBTANAS 2001**
Salah satu persamaan garis singgung dari titik $(0, 2)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$
A. $y = x\sqrt{3} - 2$ C. $y = -x\sqrt{3} - 2$ E. $y = -x\sqrt{3} + 1$
B. $y = x\sqrt{3} - 1$ D. $y = -x\sqrt{3} + 2$